Appunti delle lezioni di Analisi economica

A.A. 2002-2003
(Versione provvisoria)

Enrico Bellino

4 luglio 2003

Indice

Parte I

Alcuni richiami dei precedenti storici

Capitolo 1

Teoria ricardiana della distribuzione e del valore

1.1 Premessa: alcuni elementi di teoria del valore e della distribuzione nell'analisi di Smith

Secondo Smith le determinanti del valore di una merce sono differenti a seconda che ci si trovi in una economia primitiva o in un'economia industrializzata. Nel primo caso, dove la produzione avviene prevalentemente mediante l'impiego di lavoro, ciò che regola il valore di una merce è il suo contenuto di lavoro. L'esempio classico fatto a questo proposito è quello del valore di una volpe rispetto a quello del castoro: se per cacciare la prima è necessario un tempo mediamente doppio del tempo necessario a cacciare il secondo allora la volpe ha un valore doppio rispetto al castoro. Dunque secondo Smith nelle economie primitive vale quella che è stata chiamata *teoria del valore lavoro*. Analiticamente ciò può essere espresso mediante l'equazione:

$$\frac{p_m}{p_\mu} = \frac{\ell_m}{\ell_\mu},$$

dove p_m/p_μ indica il prezzo relativo della merce m espresso in termini della merce μ e i simboli ℓ_m e ℓ_μ indicano le quantità di lavoro incorporati, rispettivamente, nella merce m e nella merce μ.

In un'economia industrializzata, nella quale la produzione richiede oltre al lavoro anche l'utilizzo di altri fattori di produzione, il capitale e la terra, il prezzo di una merce deve remunerare anche questi fattori. Pertanto in questo contesto il *prezzo naturale* di una merce, secondo Smith è dato dalla somma di salari e profitti e rendite pagati al loro livello "naturale".[1] Que-

[1] Non entriamo qui nel merito di che cosa Smith intende per livello "naturale" delle remunerazioni dei fattori.

sta seconda teoria del valore, sicuramente più adeguata a rappresentare la realtà delle economie industrializzate, è stata formulata da Smith in maniera molto rudimentale; Smith non è stato in grado di cogliere tutte le principali implicazioni, soprattutto in relazione ai legami che tale teoria del valore ha con la teoria della distribuzione del reddito. In particolare affermando che il prezzo naturale di una merce è dato dalla somma di salari, profitti e rendite, Smith ha perso di vista i legami che necessariamente devono sussistere in un sistema economico tra queste tre variabili distributive: sostanzialmente il fatto che esse non possono essere fissate indipendentemente l'una dalle altre, e che l'aumento di una di queste necessariamente comporta la riduzione di una o di entrambe le altre. Egli scrive, ad esempio: "the natural price varies with the natural rate of *each* of its component parts" (Smith, 1776, libro I, capitolo VI, vol I, p. 56, corsivo aggiunto).

Non è ben chiaro come questa argomentazione, che appare controintuitiva, possa essere sostenuta. Marx, prendendone le distanze, la spiega in questi termini:

> Even if this occasionally brings them to blows, nevertheless the outcome of this competition between land, capital and labour finally shows that, although they quarrel with one another over the division, their rivalry tends to increase the value of the product to such an extent that each receives a larger piece, so that their competition, which spurs them on, is merely the expression of their harmony" Marx (1861-63, III, p. 503)

Ricardo ha cercato di andare oltre questa illusione apparente, mostrando come, una volta fissate le rendite, ci sia un legame inverso tra salari e profitti. La prova di questa proposizione gli riesce pienamente nel caso di un'economia con una sola merce (dove tutte le grandezze rilevanti possono essere definite in termini fisici, e la distribuzione del reddito può essere vista come la suddivisione di una "torta"); i problemi si presentano non appena si considera un'economia con più merci. In questo contesto Ricardo riuscirà a dimostrare la rivalità tra le quote distributive ricorrendo alla teoria del valore-lavoro, che però come lui stesso mostra di essere cosciente, vale soltanto in casi estremamente particolari. Marx riconoscerà a Ricardo il merito di aver distrutto (o cercato di distruggere) questa falsa apparenza Marx (1861-63, xxxxx).

1.2 La teoria ricardiana della distribuzione

1.2.1 Schema con una sola merce: il "modello del grano"

Le idee centrali della teoria ricardiana della distribuzione possono essere presentate mediante un semplice schema analitico presentato da Kaldor (1955-56) che è in seguito diventato noto come "modello del grano"; la presentazione che segue ricalca in gran parte quella fornita da Pasinetti (1975). Si consideri un sistema economico composto da tre classi sociali: proprietari terrieri, capitalisti e lavoratori. I capitalisti impiegano i lavoratori sulle terre che i proprietari terrieri danno loro in coltivazione. Nel sistema economico viene prodotto solo grano secondo la funzione di produzione $f : \Re_+ \mapsto \Re_+$:

$$X = f(N), \tag{1.1}$$

dove X indica la quantità di grano prodotta e N il numero dei lavoratori impiegati. Si suppone che $f' > 0$ e che $f'' < 0$), cioè che la tecnologia presenti rendimenti di scala decrescenti. [2] Ciò è giustificato dalla supposizione che i diversi appezzamenti di terra disponibili nell'economia presentino diversi gradi di fertilità.

Il prodotto totale dell'economia, X, si distribuisce fra le tre classi sociali sottoforma di rendite, R, ai proprietari terrieri, di salari, W, ai lavoratori e di profitti, P, ai capitalisti.

• *Rendite.* Dati i diversi gradi di fertilità delle terre si suppone che i capitalisti mettano a coltivazione dapprima le terre più fertili e man mano passino a coltivare le terre meno fertili. In un dato istante di tempo l'ultima terra che è stata messa a coltivazione è la meno fertile rispetto a quelle già messe a coltivazione. Su quest'ultima terra (detta terra "marginale") non si paga rendita, in quanto si suppone siano disponibili altri appezzamenti di terra, di uguale fertilità, utilizzabili in alternativa. I proprietari delle altre terre già messe a coltivazione possono però chiedere ai capitalisti un compenso in cambio della possibilità di coltivare sulle loro terre; l'alternativa per questi ultimi sarebbe infatti quella di organizzare il processo produttivo su terre di qualità uguale o inferiore a quella della terra marginale. Tale compenso costituisce appunto la rendita, e per ciascuna unità di terra può al massimo essere pari alla differenza fra il grano ivi ottenuto e il grano producibile

[2] Si parla di rendimenti *di scala* e non marginali in quanto si suppone che ciascun nuovo lavoratore sia impiegato su un nuovo appezzamento di terreno; ciò comporta che quando varia N varia anche la quantità di terra coltivata; si ha così una variazione della *scala* dell'attività produttiva.

su una unità di terra marginale, che è dato da $f'(N)$. A livello di tutto il sistema le rendite sono pertanto costituite dalla differenza fra il prodotto totale di grano, $f(N)$, e il grano prodotto da tutto il sistema se tutte le terre fossero della qualità della terra marginale, $Nf'(N)$:

$$R = f(N) - Nf'(N). \tag{1.2}$$

• *Salari.* I salari si suppone che siano fissati al livello di sussistenza, in base al principio malthusiano secondo cui salari superiori porterebbero a un aumento della popolazione con conseguente riduzione del salario e viceversa. Pertanto il salario unitario, x, va considerato fissato al livello di sussistenza, $\bar{x}$:

$$x = \bar{x}. \tag{1.3}$$

I salari totali invece sono dati da:

$$W = xN. \tag{1.4}$$

• *Profitti.* Nel sistema economico semplificato in esame l'unica forma di capitale è costituita dalla quantità di grano che i capitalisti devono anticipare ai lavoratori per "mantenerli" durante il ciclo produttivo, prima che il nuovo grano prodotto si renda disponibile. Pertanto il capitale dell'economia coincide con l'ammontare dei salari totali:

$$K = W; \tag{1.5}$$

inoltre la quantità di grano di cui i capitalisti dispongono come capitale all'inizio di un periodo produttivo è data:

$$K = \bar{K}; \tag{1.6}$$

I profitti sono costituiti *da ciò che rimane* ai capitalisti del grano prodotto, una volta che siano state dedotte le rendite e i salari:

$$P = X - R - W. \tag{1.7}$$

I profitti vengono cioè determinati in via *residuale*. Il saggio di profitto è dato da $\pi = P/K = \{f(N) - [f(N) - Nf'(N)] - N\bar{x}\}/(N\bar{x})$, cioè, semplificando,

$$\pi = \frac{f'(N) - \bar{x}}{\bar{x}}. \tag{1.8}$$

Si ha così un sistema di otto equazioni in otto incognite: X, N, R, x, W, K, P e π. Combinando la (1.5) e la (1.6) si ottiene $W = \bar{K} =: W^*$; [3] sostituendola nella (1.4) insieme alla (1.3) si ottiene $N = W^*/\bar{x} =: N^*$. Sostituendo quest'ultima nella (1.1) si ottiene $X = f(N^*) =: X^*$; sostituendo N^* nella (1.2) si ottiene $R = f(N^*) - N^* f'(N^*) =: R^*$; dalla (1.7) si ottiene $P = X^* - R^* - W^* =: P^*$; da ultimo dalla (1.8) si ottiene $\pi = [f'(N^*) - \bar{x}]/\bar{x} =: \pi^*$.

1.2.2 Alcune osservazioni su rendite, salari e profitti

Dall'analisi precedente si è visto che la rendita è determinata come guadagno differenziale dovuto alla fertilità dei diversi appezzamenti di terreno rispetto alla terra marginale. I salari sono fissati, in base al principio malthusiano, al livello di sussistenza. I profitti sono determinati in via residuale. Riscriviamo qui di seguito le due equazioni riguardanti i profitti:

$$P = (X - R) - W = Nf'(N) - \bar{x}N \tag{1.7$'$}$$

e

$$\pi = \frac{f'(N) - \bar{x}}{\bar{x}}. \tag{1.8$'$}$$

Come si vede da queste due equazioni i profitti e il saggio di profitto sono calcolati a partire dalla differenza tra il prodotto ottenuto sulla terra marginale e il salario unitario: le rendite determinate secondo l'equazione (1.2) fanno sì che il prodotto che rimane ai capitalisti (da cui dedurre i salari) sia lo stesso per ciascuna unità di terra.

Da queste due relazioni emerge chiaramente che le variabili distributive salari e profitti *non possono essere determinate indipendentemente l'una dall'altra*; in particolare esiste un legame inverso, un *trade-off*, tra queste due variabili, che evidenzia la presenza di interessi contrastanti (di un "conflitto fra le classi" nella terminologia marxista) da parte di lavoratori e capitalisti nella ripartizione del prodotto dell'economia. Questi sono gli elementi che caratterizzano la teoria della distribuzione di Ricardo: come accennato nella sezione 1.1 essi non sembravano essere stati colti appieno da Smith.

[3]In tutto il presente lavoro si seguirà la convenzione di denotare con un asterisco il valore assunto dalla variabile endogena di un modello in corrispondenza della soluzione.

1.3 Estensione del modello al caso di più merci

1.3.1 Aspetti problematici

La nitidezza della spiegazione della distribuzione del reddito emersa nella sezione precedente deriva essenzialmente dalla supposizione che nell'economia considerata ci sia un solo bene. Ciò fa sì che nella struttura del modello si instauri una serie di relazioni *causali* tra le variabili, che si evidenzia nel procedimento con cui si sono ottenute le soluzioni: dati il salario di sussistenza e la dotazione di capitale dell'economia si determinano i salari totali; da questi la popolazione impiegata, poi la quantità totale di grano prodotta, poi le rendite e, da ultimo, i profitti. In particolare si vede come i profitti e il saggio di profitto – che costituiscono l'oggetto di interesse di questo paragrafo – possono essere calcolati solo *dopo* che il prodotto totale dell'economia (al netto delle rendite) e il salario di sussistenza siano stati conosciuti. [4]

Nel momento in cui si introduce una seconda merce che fa da bene capitale si può vedere immediatamente che questi legami causali vengono meno. Ciò nasconderà il vincolo – emerso molto chiaramente nell'economia con una sola merce descritta dal "modello del grano" – che l'aumento della quota distributiva di una classe sociale implica la riduzione dell'altra.

Per capire ciò generalizziamo l'equazione del saggio di profitto (1.8′) al caso di un'economia con più merci usate come beni capitali. Per rendere il discorso più semplice astraiamo dalla presenza delle rendite e concentriamoci solo su salari e profitti. Per una qualunque economia possiamo definire il saggio di profitto con il seguente rapporto:

$$\pi := \frac{Q - (K + W)}{K + W}, \tag{1.9}$$

dove Q indica il prodotto lordo dell'economia, K i mezzi di produzione impiegati nel processo produttivo e W i salari. Poiché ci troviamo in un'economia con più merci prodotte e impiegate come mezzi di produzione le grandezze Q, K e W che compaiono nella (1.9) vanno intese come grandezze espresse in termini di *valore*, non più in termini fisici; ciascuna di essa va pensata cioè come una somma di quantità di merci eterogenee, moltiplicate per i rispettivi prezzi. Si instaura a questo punto la necessità di elaborare una teoria per la determinazione dei prezzi, cioè una teoria del valore.

[4] Questa *causalità*, che caratterizza parecchi aspetti della teoria ricardiana e dell'economia politica classica in generale, riflette l'esigenza da parte degli economisti classici di poter "controllare" la correttezza dei ragionamenti proposti, in una fase in cui non si era ancora diffuso tra gli economisti l'utilizzo della matematica, che avrebbe permesso di trattare anche i legami di interdipendenza tra le variabili.

Il punto di partenza per affrontare il problema del valore potrebbe essere la teoria del "prezzo naturale" di Smith, in base alla quale il prezzo di una merce è dato dalla somma di salari e profitti (ed, eventualmente, rendite) pagati al loro livello "naturale". I prezzi delle varie merci, pertanto, verranno a dipendere (anche) dal saggio di profitto; in formule possiamo scrivere che:

$$p_m(\pi).$$

Le grandezze che compaiono sul lato destro dell'equazione (1.9) vengono cos a dipendere dal saggio di profitto per il tramite dei prezzi. In termini analitici possiamo esprimere tutto ciò scrivendo che:

$$\pi = \frac{\sum p_m(\pi)q_m - [\sum p_m(\pi)k_m + \sum p_m(\pi)\bar{x}_m N]}{\sum p_m(\pi)k_m + \sum p_m(\pi)\bar{x}_m N}, \tag{1.9$'$}$$

dove i simboli q_m indicano le quantità totali prodotte delle varie merci, k_m indicano le quantità delle varie merci usate come mezzi di produzione, $\bar{x}_m$ indicano le quantità delle varie merci consumate come mezzi di sussistenza da ciascuna unità di lavoro, $m = 1, \ldots, M$, e le sommatorie vanno intese rispetto all'indice m che assume tutti i valori da 1 a M.

Si vede immediatamente che in tal caso il saggio di profitto appare sia alla sinistra che alla destra dell'equazione (1.9$'$). Le grandezze che compaiono alla destra dell'equazione che definisce il saggio di profitto non sono più note prioritariamente alla conoscenza di quest'ultimo. Il ragionamento sembra caduto in un circolo vizioso: per conoscere il saggio di profitto dobbiamo conoscere i prezzi delle varie merci, ma per conoscere questi dobbiamo conoscere il saggio di profitto. Ciò oltre a non permettere di determinare il saggio di profitto in un'economia multisettoriale oscura il legame di dipendenza di una variabile distributiva rispetto all'altra, e in particolare il fatto, così intuitivo ed evidente dal modello con una sola merce, che se una classe riceve di più l'altra deve necessariamente ricevere di meno.

1.3.2 Generalizzazione della teoria del valore-lavoro al caso delle economie industrializzate

Per questa ragione Ricardo è ricorso a una teoria del valore nella quale i prezzi relativi delle merci fossero indipendenti dalla distribuzione del reddito; questo fa sì che le grandezze che appaiono alla destra dell'equazione (1.9$'$) risultino date prima di conoscere il saggio di profitto. È a questo scopo che Ricardo tenta di generalizzare la teoria del valore-lavoro, che secondo Smith valeva solo con riferimento alle economie primitive, al caso delle economie industrializzate, nelle quali i prezzi devono remunerare, oltre al fattore lavoro, anche il capitale. Questa generalizzazione è immediatamente possibile nel caso in cui – come si era supposto nel modello del grano – l'unica forma di capitale consiste solo nell'anticipazione dei salari fatta ai lavoratori all'inizio del periodo di produzione. In tal caso il prezzo di ciascuna merce m può essere scritto come la somma dei salari pagati per produrre ciascuna unità di merce, $w\ell_m$, più i profitti che sono dati, appunto, dal ricarico (calcolato al saggio π) sul capitale, il quale è costituito solo da $w\ell_m$:

$$p_m = w\ell_m + \pi w\ell_m = w(1+\pi)\ell_m. \tag{1.10}$$

Da ciò si vede subito che in questo contesto i prezzi, pur essendo dati da salari più profitti, sono proporzionali alle quantità di lavoro: grazie a ciò il prezzo relativo di una qualsiasi merce m espresso in termini di una qualunque altra merce μ dipende solo dal rapporto tra le quantità di lavoro:[5]

$$\frac{p_m}{p_\mu} = \frac{w(1+\pi)\ell_m}{w(1+\pi)\ell_\mu} = \frac{\ell_m}{\ell_\mu}, \quad m, \mu = 1, \ldots, M.$$

Lo scopo di tutta questa elaborazione, ricordiamo, è quello di rendere le grandezze che appaiono al secondo membro dell'equazione del saggio di profitto indipendenti dal saggio di profitto stesso, così da riuscire ad arrivare a una determinazione univoca di quest'ultimo. E in tal caso, infatti, sostituendo la (1.10) nella (1.9′) il fattore di profitto $(1+\pi)$ compare al primo grado in tutti gli addendi del numeratore e del denominatore della frazione a secondo membro, e può così essere semplificato e sparire completamente da tale frazione:

$$\pi = \frac{\sum \ell_m q_m - [\sum \ell_m k_m + \sum \ell_m \bar{x}_m N]}{\sum \ell_m k_m + \sum \ell_m \bar{x}_m N}, \tag{1.9''}$$

Si è così ottenuta un'espressione del saggio di profitto che ci permette di calcolarlo effettivamente: tutte le grandezze del secondo membro della (1.9″) sono già note prima di conoscere il saggio di saggio di profitto (sono infatti o quantità di lavoro o quantità di merci). Inoltre possiamo osservare che se una qualunque delle quantità di merci consumate come sussistenze dai lavoratori, $\bar{x}_m$, dovesse aumentare, ferme restando le altre, il saggio di profitto dovrebbe necessariamente diminuire. Riappare così il *trade-off* tra

[5] È questa l'ipotesi che è stata introdotta da Pasinetti (1960) nella sua formulazione matematica del sistema ricardiano e che gli permette di far emergere tutti i risultati del "modello del grano" in un modello dove si producono più merci; si veda Pasinetti (1975, cap. 3, § 3.2).

salari e profitti che si era evidenziato in un'economia dove si produce grano mediante grano, ma in questo caso si riferisce a un'economia con più merci.

L'ottenimento di questi risultati è però fortemente legato all'ipotesi che l'unica forma di capitale sia costituita dai salari anticipati ai lavoratori per un periodo di produzione prima dell'ottenimento del prodotto. Basta soltanto variare anche di poco questa ipotesi che riappare l'interdipendenza distribuzione-prezzi che si è appena riusciti a eliminare. Supponiamo, per esempio, che nel sistema economico che stiamo considerando, per produrre ciascuna merce sia necessario impiegare il lavoro in due distinti momenti di tempo: più precisamente per ottenere una unità di merce m al tempo 0 è necessario impiegare una quantità di lavoro ℓ'_m nell'istante $t-2$ per tutto l'intervallo di tempo tra $t=-2$ e $t=-1$; poi è necessario impiegare un'altra quantità di lavoro, ℓ_m all'istante $t=-1$ per tutto l'intervallo tra $t=-1$ e $t=0$. ℓ'_m può essere visto come il "lavoro indiretto", necessario, ad esempio,

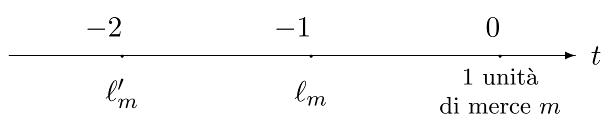

Figura 1.1: Successione temporale degli input di lavoro

a produrre gli attrezzi, da usarsi poi nell'intervallo di tempo $(-1, 0)$, assieme al lavoro diretto, ℓ_m, per produrre il bene.

In questo caso l'equazione del prezzo della merce m diventa:

$$p_m = w(1+\pi)\ell_m + w(1+\pi)^2\ell'_m. \tag{1.11}$$

Non vale più così la teoria del valore-lavoro: il prezzo relativo della generica merce m espresso in termini della merce μ non dipende solo dalle quantità di lavoro ma anche dal saggio di profitto:

$$\frac{p_m}{p_\mu} = \frac{\ell_m + (1+\pi)\ell'_m}{\ell_\mu + (1+\pi)\ell'_\mu}.$$

Analogamente a quanto visto prima l'utilizzo dei prezzi (1.11) nell'equazione del saggio di profitto (1.9′) non permetterebbe di determinare il saggio di profitto, in quanto le grandezze a secondo membro non sono determinate se non una volta noto il saggio di profitto stesso.

1.3.3 L'ipotesi di intensità di capitale uniforme

C'è un caso particolare, che è stato esaminato da Ricardo, nel quale si riesce ancora a determinare il saggio di profitto, ed è il caso nel quale il rapporto tra il lavoro indiretto e il lavoro diretto è lo stesso per tutti i settori. Più precisamente sia

$$\kappa_m := \frac{\ell'_m}{\ell_m};$$

κ_m indica il rapporto fra lavoro indiretto (il lavoro necessario per predisporre gli attrezzi necessari alla produzione, nell'esempio di prima) e il lavoro diretto; potremmo considerare κ_m un indicatore dell'"intensità capitalistica" della tecnica di produzione della merce m. Se si suppone che:

$$\kappa_m = \kappa, \quad m = 1, \ldots, M, \tag{1.12}$$

cioè che l'intensità capitalistica sia uniforme per tutte le industrie le equazioni dei prezzi (1.11) diventano:

$$p_m = w(1+\pi)[1+\kappa(1+\pi)]\ell_m. \tag{1.13}$$

In questo caso i prezzi relativi sarebbero ancora determinati unicamente dalle quantità di lavoro, in quanto

$$\frac{p_m}{p_\mu} = \frac{w(1+\pi)[1+\kappa(1+\pi)]\ell_m}{w(1+\pi)[1+\kappa(1+\pi)]\ell_\mu} = \frac{\ell_m}{\ell_\mu};$$

sarebbe ancora valida, cioè, la teoria del valore-lavoro. Sostituendo le (1.13) nella (1.9′) si ottiene un'espressione equivalente alla (1.9″). Si riesce così a determinare il saggio di profitto e a dimostrare l'esistenza di un *trade-off* tra salario reale e saggio di profitto. Ma questi risultati dipendono crucialmente dall'ipotesi di uniformità dell'intensità capitalistica fra i settori (equazione 1.12). Tale ipotesi non è però plausibile dal punto di vista economico.

1.3.4 La teoria del valore-lavoro come "approssimazione" - Misura invariabile del valore

Preso atto di questa conclusione negativa Ricardo ha reagito sostenendo che la teoria del valore-lavoro, per quanto non valida in generale, può fornire una buona approssimazione del prezzo relativo delle merci. Soltanto che questa affermazione apre una serie di problemi di natura non diversa da quelli dai quali ci si vuole liberare. Infatti, per affermare che il rapporto tra le quantità di lavoro costituisce una buona approssimazione del "vero"

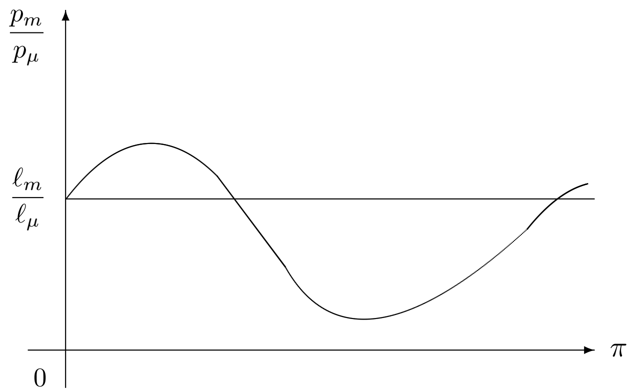

Figura 1.2: Andamento di p_m/p_μ al variare di π

prezzo relativo delle merci bisogna anche saper valutare il grado di tale approssimazione di tale affermazione. Come si è già avuto modo di dire, e come sarà sviluppato nel capitolo seguente, il rapporto fra p_m e p_μ è funzione di π; infatti $\frac{p_m}{p_\mu}(0) = \frac{\ell_m}{\ell_\mu}$, ma non appena π si discosta da 0 allora $\frac{p_m}{p_\mu}(\pi) \neq \frac{\ell_m}{\ell_\mu}$.

L'approssimazione che si compie usando ℓ_m/ℓ_μ anziché p_m/p_μ è costituita dalla differenza

$$\frac{p_m}{p_\mu}(\pi) - \frac{\ell_m}{\ell_\mu}.$$

Ma poiché il prezzo di una merce deve essere necessariamente espresso nei termini di un'altra, il rapporto p_m/p_μ va visto come un tutt'uno; e non c'è possibilità di sapere se quando π si discosta da 0 il rapporto p_m/p_μ si discosta da ℓ_m/ℓ_μ per cause inerenti la merce in esame (nel nostro caso la merce m) o per cause inerenti la merce usata numerario (nel nostro caso la merce μ). Detto in altre parole non siamo in grado di sapere se, quando π si discosta da 0, il rapporto p_m/p_μ aumenta perché la merce m si rincara o perché la merce μ usata come numerario si ribassa. Per escludere tale ambiguità sarebbe necessario usare come numerario una merce il cui valore non avesse la necessità di variare relativamente a quello delle altre merci quando varia il saggio di profitto; in questo caso le variazioni del rapporto p_m/p_μ sarebbero da attribuire *esclusivamente* a variazioni del valore della merce m. Una merce con tali caratteristiche costituirebbe, per usare la terminologia di Ricardo, una "misura invariabile del valore".

Two commodities vary in relative value, and we wish to know in which the variation has really taken place. If we compare the present value of one, with shoes, stockings, hats, iron, sugar, and all other commodities, we find that it will exchange for precisely the same quantity of all these things as before. If we compare the other with the same commodities, we find it has varied with respect to them all: we may then with great probability infer that the variation has been in this commodity, and not in the commodities with which we have compared it. If on examining still more particularly into all the circumstances connected with the production of these various commodities, we find that precisely the same quantity of labour and capital are necessary to the production of the shoes, stockings, hats, iron, sugar, &c.; but that the same quantity as before is not necessary to produce the single commodity whose relative value is altered, probability is changed into certainty, and we are sure that the variation is in the single commodity: we then discover also the cause of its variation. Ricardo (1817, pp. 17–18)

When commodities varied in relative value, it would be desirable to have the means of ascertaining which of them fell and which rose in real value, and this could be effected only by comparing them one after another with some invariable standard measure of value, which should itself be subject to none of the fluctuations to which other commodities are exposed. Of such a measure it is impossible to be possessed, because there is no commodity which is not itself exposed to the same variations as the things, the value of which is to be ascertained; that is, there is none which is not subject to require more or less labour for its production. Ricardo (1817, pp. 43–44)

But if this cause of variation in the value of a medium could be removed—if it were possible that in the production of our money for instance, the same quantity of labour should at all time be required, still it would not be a perfect standard or invariable measure of value, because, as I have already endeavoured to explain, it would be subject to relative variations from a rise or fall of wages, on account of the different proportions of fixed capital which might be necessary to produce it, and to produce those other commodities whose alteration of value we wished to ascertain. Ricardo (1817, p. 44)

If, then, I may suppose myself to be possessed of a standard so nearly approaching to an invariable one, the advantage is, that I shall be enabled to speak of the variations of other things, without embarrassing myself on every occasion with the consideration of the possible alteration in the value of the medium in which price and value are estimated. Ricardo (1817, p. 46)

> The necessity of having to express the price of one commodity in terms of another which is arbitrarily chosen as standard, complicates the study of the price-movements which accompany a change in distribution. It is impossible to tell of any particular price-fluctuation whether it arises from the peculiarities of the commodity which is being measured or from those of the measuring standard. The relevant peculiarities, as we have just seen, can only consist in the inequality in the proportions of labour to means of production in the successive layers into which a commodity and the aggregate of its means of production can be analyzed; for it is such an inequality that makes it necessary for the commodity to change in value relative to its means of production as the wage changes. Sraffa (1960, p. 18)

Ricardo non fu però in grado di individuare una merce numerario con tale proprietà di invarianza. Rimane così incompiuto anche il tentativo di sostenere che la teoria del valore-lavoro costituisce una buona approssimazione della realtà, in quanto la mancanza di una misura invariabile del valore non permette di valutare il grado di approssimazione di tale affermazione.

1.4 Osservazioni conclusive

Concludendo:

1. l'impossibilità di ottenere delle espressioni per il prodotto sociale Q, per il capitale K e per il monte salari W indipendenti dal saggio di profitto,
2. l'impossibilità di formulare una teoria del valore-lavoro per un'economia industrializzata e, da ultimo,
3. l'impossibilità di fornire un grado di approssimazione della teoria del valore-lavoro

hanno sembrato minare alle fondamenta la possibilità di generalizzare al caso di un'economia con più merci la teoria della distribuzione che Ricardo ha presentato con riferimento a un'economia con una sola merce.

Capitolo 2

Teoria del valore e dei prezzi in Marx

2.1 Introduzione e definizioni

La teoria del valore gioca un ruolo fondamentale nella teoria economica di Marx, in quanto essa sta alla base della spiegazione della natura del profitto, il quale, a sua volta, viene considerato originato dallo *sfruttamento* dei lavoratori presente nelle economie capitalistiche.

Marx (1867-86-94) riprende la teoria del valore lavoro già vista in Ricardo, seppur con alcune importanti qualificazioni. Il valore di una merce per Marx è, *per definizione*, la quantità di lavoro "socialmente necessaria" per la sua produzione.

Una importante distinzione che troviamo in Marx è la distinzione tra *valore d'uso* e *valore di scambio* del lavoro, o meglio, la distinzione tra *lavoro* e *forza lavoro*. Il lavoro umano ha la caratteristica di produrre merci in quantità *superiori* a quelle che sono necessarie a produrre i mezzi di sussistenza necessari per riprodurre (per rigenerare) la forza lavoro. La concorrenza capitalistica conduce, secondo Marx, i prezzi delle merci al loro costo di produzione. In una società capitalistica anche il lavoro, secondo Marx, è considerato una merce come tutte le altre, e pertanto verrà scambiato al suo costo di (ri-)produzione, cioè al salario di sussistenza. La sussistenza dei lavoratori è dunque il *valore di scambio del lavoro*. Ma il lavoro erogato dal lavoratore (*valore d'uso del lavoro*) si è detto che è superiore a quello necessario a produrre le sussistenze. L'eccedenza di ciò che un lavoratore produce su ciò che è strettamente necessario al suo sostentamento, chiamata da Marx *plusvalore*, viene interamente incamerata dai capitalisti. Il plusvalore diventa così la misura dello *sfruttamento*.

Il valore di una merce è costituito, per Marx, dalla somma di tre componenti:

$$c + v + s,$$

dove c è la quantità di lavoro socialmente necessaria a reintegrare il "capitale costante", cioè l'insieme delle macchine e delle merci consumate nel processo produttivo, v la quantità di lavoro socialmente necessaria a reintegrare il "capitale variabile", definito come le sussistenze dei lavoratori e s il "plusvalore", o quella parte di lavoro incorporato nelle merci di cui si appropriano i capitalisti.

Consideriamo un sistema economico nel quale ci siano tre settori, uno che produce i mezzi di produzione, uno che produce le merci salario e il terzo che produce merci di lusso. I "valori" totali, m_i $(i = 1, 2, 3)$, delle produzioni di ciascun settore sono *definiti* dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} m_1 &= c_1 + v_1 + s_1 \\ m_2 &= c_2 + v_2 + s_2 \\ m_3 &= c_3 + v_3 + s_3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

(Supponiamo di normalizzare la quantità totale di merce prodotta da ciascun settore a 1, cosicché i valori m_i sono i valori *unitari* delle varie merci.)

Affinché il sistema sia in grado di riprodursi di anno in anno esattamente uguale a se stesso, senza espandersi né contrarsi (stiamo considerando cioè un sistema stazionario, che Marx chiama "schema di riproduzione semplice") dovranno essere soddisfatte le relazioni:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= c_1 + v_1 + s_1 \\ v_1 + v_2 + v_3 &= c_2 + v_2 + s_2 \\ s_1 + s_2 + s_3 &= c_3 + v_3 + s_3. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Definiamo il saggio di plusvalore, σ_i, col seguente rapporto:

$$\sigma_i = s_i/v_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

Secondo Marx σ_i sarà uniforme nei vari settori, in quanto la concorrenza tenderà a uniformare i salari pagati nei vari settori; d'altra parte la giornata lavorativa è uguale in tutti i settori, quindi indicando con L la lunghezza in ore della "giornata lavorativa", con w il salario giornaliero di un lavoratore, ossia la quantità di ore lavoro necessarie a produrre le sussistenze giornaliere di un lavoratore e con N_i il numero degli occupati nel settore i si ha

$$s_i + v_i = LN_i, \quad \text{(ore lavoro \textit{erogate} al settore } i \text{ in una giornata)}$$

e

$$v_i = wN_i \quad \text{(ore lavoro \textit{pagate} nel settore } i \text{ in una giornata).}$$

Pertanto
$$\sigma_i = \frac{s_i}{v_i} = \frac{s_i + v_i - v_i}{v_i} = \frac{LN_i - wN_i}{wN_i} = \frac{L - w}{w};$$
l'ultima espressione trovata per σ_i è indipendente da i, quindi possiamo scrivere
$$\sigma_i = \sigma, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.4}$$
(σ viene indifferentemente chiamato saggio di plusvalore o saggio di sfruttamento).

Si possono così riscrivere le (2.1):
$$\begin{aligned} m_1 &= c_1 + v_1(1+\sigma) \\ m_2 &= c_2 + v_2(1+\sigma) \\ m_3 &= c_3 + v_3(1+\sigma). \end{aligned} \tag{2.1$'$}$$

Ma i capitalisti più che il rapporto σ sono interessati al rapporto tra il plusvalore e il capitale *totale*
$$\pi_i = \frac{s_i}{c_i + v_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.5}$$
cioè il saggio di profitto.

Definiamo ora "composizione organica del capitale" il rapporto
$$\gamma_i = c_i / v_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.6}$$
Possiamo così ri-esprimere il saggio di profitto:
$$\pi_i = \frac{s_i}{c_i + v_i} = \frac{s_i/v_i}{c_i/v_i + 1} = \frac{\sigma}{1 + \gamma_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.5$'$}$$

La concorrenza capitalistica dovrebbe far tendere all'uniformità i saggi di profitto per effetto della mobilità dei capitali alla ricerca del saggio di profitto più elevato. Ma dalla (2.5$'$) si vede subito che ciò sarà possibile solo se
$$\gamma_i = \gamma, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.7}$$
cioè se la composizione organica del capitale è uniforme nei vari settori. In caso contrario *se* le merci fossero scambiate ai valori non potrebbe realizzarsi l'uniformità dei saggi di profitto.

Secondo Marx la concorrenza tra i capitalisti tenderà a realizzare comunque l'uniformità dei saggi di profitto. Come? Instaurando dei rapporti di scambio diversi dai valori, calcolati in maniera tale da garantire un ricarico proporzionale al capitale totale (e non più solo al capitale variabile come avviene con i valori: si veda l'equazione (2.1′)). Per Marx questa è un'altra distorsione che avviene nei sistemi capitalistici, uno sfruttamento di alcuni settori a danno di altri (la prima è quella costituita dalla differenza tra lavoro erogato e lavoro pagato). Le grandezze *originarie* sono i valori; i prezzi sono delle grandezze *derivate* (dai valori), che operano una redistribuzione del plusvalore in base alla logica capitalistica che pone il capitale al centro del processo di produzione.

2.2 Trasformazione dei valori in "prezzi di produzione"

Se nella realtà le merci si scambiano in maniera tale da rendere uniforme il saggio di profitto fra i vari settori, vuol dire che i capitalisti si appropriano del plusvalore viene appropriato in un modo diverso da come esso si è formato. Infatti secondo Marx il plusvalore è prodotto dal solo capitale variabile (cioè dal lavoro) e valori sono calcolati in modo tale da riflettere ciò (si veda l'equazione (2.1′)). Il sistema capitalistico opera però come una specie di "serbatoio" che da un lato raccoglie tutto il plusvalore che si forma e dall'altro lo redistribuisce non più in proporzione al capitale variabile (cioè così come si è formato), ma in proporzione al capitale totale.

Il fondo comune sul quale si opera questa redistribuzione sarebbe costituito da $s_1 + s_2 + s_3$; il saggio medio di profitto sarebbe:[1]

$$\pi = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{c_1 + c_2 + c_3 + v_1 + v_2 + v_3}. \tag{2.8}$$

Possiamo ora introdurre i nuovi rapporti di scambio attraverso i quali si opera la suddetta redistribuzione del plusvalore, e che Marx chiama "prezzi di produzione":

$$\begin{aligned} p_1 &= (c_1 + v_1)(1 + \pi) \\ p_2 &= (c_2 + v_2)(1 + \pi) \\ p_3 &= (c_3 + v_3)(1 + \pi). \end{aligned} \tag{2.9}$$

[1] Si osservi che il saggio medio di profitto così definito è una media ponderata dei saggi di profitto delle diverse sfere di produzione, i cui pesi sono dati dalle rispettive proporzioni di capitale totale anticipato: si ha infatti che

$$\pi = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{c_1 + c_2 + c_3 + v_1 + v_2 + v_3} = \frac{\frac{s_1}{c_1+v_1}(c_1 + v_1) + \frac{s_2}{c_2+v_2}(c_2 + v_2) + \frac{s_3}{c_3+v_3}(c_3 + v_3)}{(c_1 + v_1) + (c_2 + v_2) + (c_3 + v_3)} =$$

$$= \pi_1 \frac{c_1 + v_1}{\sum_{i=1}^3 (c_i + v_i)} + \pi_2 \frac{c_2 + v_2}{\sum_{i=1}^3 (c_i + v_i)} + \pi_3 \frac{c_3 + v_3}{\sum_{i=1}^3 (c_i + v_i)} = \sum_{i=1}^3 \pi_i \omega_i,$$

dove $\omega_i = (c_i + v_i)/\sum_{i=1}^3 (c_i + v_i)$.

Marx a questo punto osserva che:

1. i profitti totali sono uguali al plusvalore totale. Infatti:

$$\begin{aligned} \text{profitti totali: } P &:= P_1 + P_2 + P_3 = \\ &= \pi(c_1 + v_1) + \pi(c_2 + v_2) + \pi(c_3 + v_3) = \\ &= \pi(c_1 + c_2 + c_3 + v_1 + v_2 + v_3), \\ \text{(per la (2.9))} \qquad &= s_1 + s_2 + s_3 := S; \end{aligned}$$

2. la produzione totale, valutata ai prezzi di produzione, è pari alla produzione totale valutata ai valori:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= c_1 + v_1 + P_1 + c_2 + v_2 + P_2 + c_3 + v_3 + P_3 = \\ &= c_1 + c_2 + c_3 + v_1 + v_2 + v_3 + P_1 + P_2 + P_3 = \\ &= C + V + P, \end{aligned}$$

   dove $C := c_1 + c_2 + c_3$ e $V := v_1 + v_2 + v_3$; d'altra parte:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &= c_1 + c_2 + c_3 + v_1 + v_2 + v_3 + s_1 + s_2 + s_3 \\ &= C + V + S; \end{aligned}$$

   ricordando che $P = S$ segue ciò che si voleva provare.

Sulla base di queste due osservazioni Marx conclude che la trasformazione dei valori in prezzi di produzione operata dal sistema capitalistico è solo una *redistribuzione* di plusvalore che si è già formato nella sfera di produzione; questa trasformazione serve solo a creare la mistificazione che tutto il capitale è produttivo, non solo il capitale variabile, cosicché appaia legittima l'appropriazione del profitto da parte dei capitalisti; in realtà invece il profitto è solo plusvalore mascherato. Se le merci venissero scambiate ai valori (anziché ai prezzi di produzione) il plusvalore verrebbe ad essere distribuito in modo proporzionale al solo capitale variabile, e così si percepirebbe che solo il fattore lavoro è produttivo,[2] e che l'appropriazione del plusvalore da parte dei capitalisti costituisce uno sfruttamento dei lavoratori, in quanto una parte di lavoro erogato non viene pagato. Il sistema capitalistico però, mediante la trasformazione dei valori in prezzi di produzione, nasconde questo aspetto: distribuendo il plusvalore in proporzione al capitale totale si dà l'illusione che tutto il capitale sia produttivo.

[2]Si "immette" infatti v_i e si ottiene $v_i + s_i$; per tale ragione le sussistenze vengono chiamate capitale *variabile*, a differenza degli altri mezzi di produzione che costituiscono il capitale costante.

2.3 Esempio numerico

Nella tabella 2.1 calcoliamo i valori, il saggio di plusvalore, la composizione organica del capitale e il saggio di profitto di ciascun settore sulla base dei dati annotati nelle prime tre colonne della tabella.

Settore	c_i	v_i	s_i	m_i	$\sigma_i = \frac{s_i}{v_i}$	$\gamma_i = \frac{c_i}{v_i}$	$\pi_i = \frac{s_i}{c_i+v_i}$
1	225	90	60	375	2/3	2,5	0,19
2	100	120	80	300	2/3	$0,8\bar{3}$	$0,\overline{36}$
3	50	90	60	200	2/3	$0,\bar{5}$	0,43
	375	300	200	875		$(\bar{\gamma} = 0,8)$	

Tabella 2.1: **Tabella in valori**

Si noti come le grandezze riportate nella tabella 2.1 rispettino le condizioni (2.2) della riproduzione semplice: il valore della produzione di capitale costante (375) coincide con il capitale costante utilizzato nella produzione (375); lo stesso si può dire della produzione di capitale variabile e di beni di lusso. Inoltre si può notare come i saggi di profitto calcolati a partire dai valori siano diversi da settore a settore.

Calcoliamo ora il saggio medio di profitto: $\pi = S/(C+V) = 200/675 = 0,\overline{296}$. Trasformiamo ora i valori così ottenuti in prezzi di produzione.

Settore	c_i	v_i	s_i	m_i	$0,\overline{296}(c_i+v_i)$ (profitti)	$0,\overline{296}(c_i+v_i)$ (prezzi)	$p_i - m_i$
1	225	90	60	375	$93,\bar{3}$	$408,\bar{3}$	$33,\bar{3}$
2	100	120	80	300	$65,\overline{185}$	$285,\overline{185}$	$-14,\overline{814}$
3	50	90	60	200	$41,\overline{481}$	$182,\overline{481}$	$-18,\overline{518}$
	375	300	200	875	200	875	

Tabella 2.2: **Tabella in prezzi di produzione**

Si osservi che la somma dei valori coincide con la somma dei prezzi di produzione, così come la somma dei plusvalori coincide con la somma dei profitti. Tuttavia la trasformazione operata dei valori in prezzi viene a violare le condizioni della riproduzione semplice (definite dalla relazione (2.2)): la produzione del primo settore (quello che produce il capitale costante), valutata ai prezzi $(408,\bar{3})$ è superiore al capitale costante utilizzato (375);

analogamente la produzione del secondo settore, che produce i beni di sussistenza, valutata ai prezzi di produzione $(285,\overline{185})$ è inferiore ai beni di sussistenza utilizzati nel processo produttivo (300); da ultimo la produzione di beni di lusso valutata ai prezzi $(182,\overline{481})$ è inferiore al plusvalore totale (200). Ciò non è accettabile perché il passaggio dai valori ai prezzi di produzione non dovrebbe avere nulla a che fare con le proprietà di stazionarietà o di non stazionarietà del sistema.

2.4 L'"errore" di Marx e la soluzione di Bortkiewicz

Il problema prima evidenziato si fonda però su un errore che non è intrinseco al processo di trasformazione, ma al modo con cui questo è stato impostato. Infatti il processo di trasformazione proposto da Marx è parziale perché mentre si applica alle merci quando vengono considerate come prodotti (cioè quando sono scritte al primo membro delle equazioni dei prezzi (2.9)) non si applica alle stesse quando esse sono viste come mezzi di produzione (cioè quando sono scritte al secondo membro delle equazioni (2.9)); in altri termini mentre per le merci prodotte i valori sono stati trasformati in prezzi ciò non è avvenuto per le merci usate per produrle.

von Bortkiewicz (1907) ha presentato un metodo alternativo (e corretto) per trasformare i valori in prezzi di produzione. Utilizziamo ancora la normalizzazione delle quantità in base alla quale la produzione totale della industria 1 corrisponde a una unità fisica di capitale costante (e analogamente sia per le altre industrie). Il prezzo di produzione di 1 unità di capitale costante sia λ_1 volte il suo valore; il prezzo di produzione di 1 unità di capitale variabile sia λ_2 volte il suo valore e il prezzo di produzione di 1 unità di beni di lusso sia λ_3 volte il suo valore, cioè

$$p_1 = \lambda_1 C, \quad p_2 = \lambda_2 V \quad \text{e} \quad p_3 = \lambda_3 S, \tag{2.10}$$

con λ_1, λ_2 e λ_3 incognite da determinare. Sia inoltre π il saggio generale di profitto. Valgono ancora le condizioni (2.2) della riproduzione semplice; esse, una volta trasformate in termini di prezzi di produzione, diventano:

$$\begin{array}{rcl} (c_1\lambda_1 + v_1\lambda_2)(1+\pi) & = & (c_1 + c_2 + c_3)\lambda_1 \\ (c_2\lambda_1 + v_2\lambda_2)(1+\pi) & = & (v_1 + v_2 + v_3)\lambda_2 \\ (c_3\lambda_1 + v_3\lambda_2)(1+\pi) & = & (s_1 + s_2 + s_3)\lambda_3 \end{array} \tag{2.11}$$

Si è così scritto un sistema di tre equazioni con 4 incognite: λ_1, λ_2, λ_3 e π. Una di queste incognite dovrà dunque essere fissata esogenamente al sistema

(2.11). Poiché dal punto di vista economico ha senso fissare pari a 1 il prezzo di una merce potremmo fissare, ad esempio,

$$p_3 = 1 \tag{2.12}$$

(esprimiamo cioè i prezzi del capitale costante e del capitale variabile in termini di una unità del bene di lusso). Ma la (2.12) permette allora di chiudere il grado di libertà del sistema (2.11): infatti essa, una volta la sostituita nella (2.10), implica:

$$\lambda_3 = 1/S.$$

Una volta risolto il sistema (2.11) si sostituiscono i valori trovati[3] per le λ_i nelle (2.10) e si ottengono i prezzi di produzione.

Si noti come in questa impostazione del problema della trasformazione il saggio di profitto viene determinato *congiuntamente* ai prezzi di produzione, e non in via prioritaria, come faceva Marx desumendolo direttamente dai valori (cfr. equazione (2.8)). L'interdipendenza fra prezzi e distribuzione del reddito viene a rompere il ragionamento di tipo *causale* che voleva condurre Marx, secondo il quale dai valori si poteva calcolare il saggio di profitto e da quest'ultimo i prezzi. Determinare il saggio di profitto all'interno del sistema dei valori soltanto avrebbe fatto da fondamento all'idea che il profitto è lavoro non pagato. Invece la determinazione del saggio di profitto congiuntamente ai prezzi di produzione offusca il legame fra profitto e sfruttamento, anche se in diverse analisi successive è stato dimostrato che il saggio di profitto è positivo se e solo se il saggio di sfruttamento è positivo (si veda Morishima (1973)).[4]

[3] Le soluzioni del sistema (2.11) sono:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{f_2 g_1 + g_2 - \sqrt{(g_2 - f_2 g_1)^2 + 4 f_1 f g_1 g_2}}{2(f_2 - f_1)} - 1 =: \bar{\pi} \\ \lambda_3 &= 1/S \\ \lambda_2 &= \frac{g_2/S}{g_2 + (f_3 - f_2)(1+\bar{\pi})} =: \bar{\lambda}_2 \\ \lambda_1 &= \frac{(1+\bar{\pi}) f_1 \bar{\lambda}_2}{g_1 - (1+\bar{\pi})}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

dove

$$f_i := v_i/c_i, \quad g_i := (v_i + c_i + s_i)/c_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Si noti come la soluzione rispetto al saggio di profitto sia indipendente dalle condizioni di produzione dei beni di lusso.

[4] Si osservi come anche Ricardo si è scontrato con il problema dell'interdipendenza fra prezzi e distribuzione, anche se le ragioni per cui Ricardo cercava di ragionare in maniera causale erano di natura diversa da quelle di Marx.

Possiamo da ultimo vedere come si può operare la trasformazione dei valori in prezzi di produzione seguendo il metodo di Bortkiewicz partendo dai dati dell'esempio numerico della tabella 2.1. Risolvendo il sistema (2.10)-(2.11) i prezzi di produzione e il saggio di profitto che si ottengono sono:

$$\pi = 0,25, \quad p_1 = 1,28, \quad p_2 = 1,0\bar{6}, \quad p_3 = 1;$$

le grandezze settoriali espresse in prezzi di produzione sono pertanto:

Settore	$\lambda_1 c_i$	$\lambda_2 v_i$	$0,25(\lambda_1 c_i + \lambda_2 v_i)$ (profitti)	p_i (prezzi)
1	288	96	96	480
2	128	128	64	320
3	64	96	40	200
	480	320	200	1000

Tabella 2.3: **Tabella in prezzi di produzione (metodo di Bortkiewicz)**

Va osservato che mentre la somma dei profitti (200) coincide con la somma dei plusvalori, la somma dei valori della produzione totale (875) *non* coincide con la somma dei prezzi della produzione totale (1000). Ma ciò non costituisce un problema dal punto di vista economico, essendo soltanto una conseguenza delle scelte che sono state fatte circa il numerario: nel sistema dei valori il numerario scelto è l'unità di lavoro, nel sistema dei prezzi una unità del bene di lusso.

Capitolo 3

Analisi neoclassica

3.1 Modello di equilibrio economico generale di scambio

È questo il modello "mininale" per descrivere la logica della teoria neoclassica (si vedano, ad esempio, Walras (1874), Pareto (1897), Arrow e Debreu (1954)).

Consideriamo un sistema economico con I individui, $i = 1, \ldots, I$ ed M merci, $m = 1, \ldots, M$. Non c'è attività di produzione (si tratta evidentemente di una semplificazione; la sua reintroduzione è sempre possibile ma non modifica sostanzialmente i risultati). C'è solo *scambio*; le M merci sono disponibili in natura in quantità date (e non sono modificabili in quanto non c'è produzione). Tali merci sono allocate inizialmente tra i vari individui; queste "dotazioni iniziali" sono rappresentate dai seguenti I vettori a M componenti:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \vdots \\ \bar{x}_{m1} \\ \vdots \\ \bar{x}_{M1} \end{bmatrix}, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1i} \\ \vdots \\ \bar{x}_{mi} \\ \vdots \\ \bar{x}_{Mi} \end{bmatrix}, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_I = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1I} \\ \vdots \\ \bar{x}_{mI} \\ \vdots \\ \bar{x}_{MI} \end{bmatrix},$$

dove $\bar{x}_{mi}$ indica la quantità di merce m posseduta inizialmente dall'individuo i. Gli individui possono scambiarsi liberamente queste dotazioni in base a certi rapporti di scambio (prezzi relativi) che ciascuno di essi prenderà per dati[1], ma che sarà il sistema stesso (il "mercato") a determinare. Il problema principale studiato dalla teoria dell'equilibrio economico generale

[1] Si suppone che I sia sufficientemente grande in maniera tale che le decisioni di ciascun individuo preso singolarmente siano ininfluenti sui prezzi; in altri termini si suppone che vi sia concorrenza perfetta tra gli individui.

è l'esistenza di un sistema di prezzi relativi che rende compatibili le decisioni di scambio dei diversi individui; tale compatibilità consiste nell'uguaglianza per ciascuna merce fra domanda totale (cioè relativa a tutti gli individui) e offerta totale.

3.1.1 Scelte dell'individuo i

L'individuo i considera il vettore dei prezzi delle merci, $\mathbf{p}$, come un dato; possiede le dotazioni $\bar{\mathbf{x}}_i$; può venderle e con il ricavato, $\mathbf{p}^T \bar{\mathbf{x}}_i$, può comprare il vettore $\mathbf{x}_i$ (in generale $\mathbf{x}_i \neq \bar{\mathbf{x}}_i$). Come sceglie $\mathbf{x}_i$? Prima di tutto l'acquisto di $\mathbf{x}_i$ deve rispettare il vincolo di bilancio, $\mathbf{p}^T \mathbf{x}_i \leq \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{x}}_i$. Ciò però non determina univocamente la scelta di acquisto di i; si suppone però che i sia dotato di un sistema di preferenze, $\succsim_i$,[2] che per semplicità di esposizione supponiamo sia rappresentabile da una funzione $u_i : \Re_+^M \mapsto \Re$, tale che $u_i(\mathbf{x}_i) \geq u_i(\mathbf{y}_i)$ ogniqualvolta $\mathbf{x}_i \succsim_i \mathbf{y}_i$; tale funzione viene detta *funzione di utilità*.

Si suppone che u_i soddisfi le seguenti ipotesi:[3]

1. u_i è continua con derivate parziali prime e seconde continue;
2. $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_{mi}} > 0$ per ogni m;
3. $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_{mi}^2} < 0$ per ogni m.

Ciascuna derivata parziale della funzione di utilità, $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_{im}}$, è la cosiddetta *utilità marginale* della merce m, cioè la variazione dell'utilità conseguente a una variazione unitaria della quantità consumata di merce m, ferme restando le quantità consumate delle altre merci. L'ipotesi 2 afferma che ciascun incremento unitario di quantità consumata di merce m aumenta l'utilità (ipotesi di non-sazietà); l'ipotesi 3 afferma che questi incrementi di utilità sono man mano più smorzati al crescere della quantità di merce m consumata (utilità marginale decrescente).

[2] La scrittura $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ significa che il paniere di merce $\mathbf{x}$ è preferito o indifferente rispetto al paniere $\mathbf{y}$ dall'individuo in esame.

[3] Normalmente le supposizioni riguardanti le preferenze del consumatore vengono introdotte sulla relazione di preferenza $\succsim$ e si dimostra poi che sotto opportune ipotesi tale relazione è rappresentabile da una funzione di utilità avente certe proprietà; per semplicità in questo contesto si introducono le proprietà delle preferenze direttamente sulla funzione di utilità. Per una trattazione più generale e, in particolare, per il problema della rappresentabilità di un sistema di preferenze attraverso una funzione di utilità si veda, ad esempio, Mas-Colell, Whinston, e Green (1995, capitolo 3).

Il consumatore sceglierà $\mathbf{x}_i$ in modo da massimizzare u_i subordinatamente al vincolo di bilancio:

$$\max_{\mathbf{x}_i} u_i(\mathbf{x}_i) \quad \text{s. v.} \quad \mathbf{p}^T\mathbf{x}_i \le \mathbf{p}^T\bar{\mathbf{x}}_i. \tag{3.1}$$

Le condizioni necessarie per un massimo vincolato interno (cioè con componenti x_i tutte positive) sono individuabili dalle seguenti condizioni poste sulla funzione lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{x}_i, \lambda) := u_i(\mathbf{x}_i) + \lambda(\mathbf{p}^T\bar{\mathbf{x}}_i - \mathbf{p}^T\mathbf{x}_i)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{mi}} = 0, \Leftrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_{mi}}(\mathbf{x}_i) = \lambda p_m, \quad m = 1, \ldots, M \tag{3.2a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0, \Leftrightarrow \mathbf{p}^T\mathbf{x}_i = \mathbf{p}^T\bar{\mathbf{x}}_i. \tag{3.2b}$$

(3.2) è un sistema di $M+1$ equazioni in $M+1$ incognite (le $\mathbf{x}_i$ e λ); il vettore $\mathbf{p}$ è un parametro. Pertanto le sue soluzioni possono essere viste come *funzioni* del vettore $\mathbf{p}$: $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) = [x_{mi}(\mathbf{p})]$ e $\lambda = \lambda(\mathbf{p})$. Il vettore $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ costituisce il vettore delle *funzioni individuali di domanda*.

Esempio 3.1 (Ottenimento delle funzioni individuali di domanda) *Si consideri il caso di un consumatore che può scegliere le quantità acquistabili di due merci, '1' e '2'. La funzione di utilità del consumatore è* $u = (x_1)^{1/2} + (x_2)^{1/2}$, *dove* x_1 *e* x_2 *sono le quantità consumate delle due merci. In tal caso le condizioni necessarie al raggiungimento del massimo (3.2) diventano:*

$$\frac{1}{2}x_1^{-1/2} = \lambda p_1 \tag{3.2a$'$}$$

$$\frac{1}{2}x_2^{-1/2} = \lambda p_2 \tag{3.2a$''$}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2. \tag{3.2b$'$}$$

Risolvendo questo sistema rispetto a x_1 *e* x_2 *e considerando* p_1 *e* p_2 *come parametri si ottiene:*

$$x_1(\mathbf{p}) = \frac{\bar{x}_1 + (p_2/p_1)\bar{x}_2}{1 + p_1/p_2} \quad e \quad x_2(\mathbf{p}) = \frac{(p_1/p_2)\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{1 + p_2/p_1}.$$

□

$x_{im}(\mathbf{p})$ costituisce la domanda *lorda* della merce m, cioè la quantità *totale* che l'individuo i vuole possedere della merce m dopo gli scambi. Ciascun

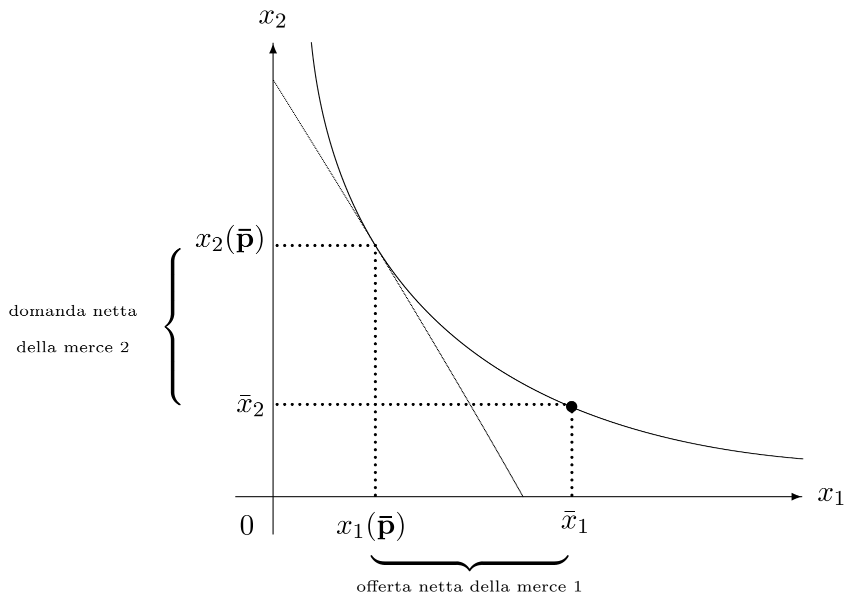

Figura 3.1: Equilibrio del consumatore

individuo possiede però già una quantità $\bar{x}_{im}$ di merce m; pertanto la quantità di merce m che i acquisterà sul mercato sarà pari a $x_{im} - \bar{x}_{im}$; tale quantità se positiva costituisce la domanda *netta* e se negativa costituisce l'offerta *netta* della merce m esercitata dall'individuo i (si veda la figura 3.1).

Sulla forma delle funzioni individuali di domanda non si può dire "molto"; si può dimostrare che

$$\mathbf{p}^T \mathbf{x}_i(\mathbf{p}^T) = \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{x}}_i \tag{3.3}$$

e che

$$\mathbf{x}_i(t\mathbf{p}) = \mathbf{x}_i(\mathbf{p}), \quad t > 0, \tag{3.4}$$

cioè il *valore* delle quantità domandate dall'individuo coincide col *valore* delle quantità da lui offerte (eq. (3.3)) e che le quantità domandate non dipendono dal *livello* dei prezzi ma solo dai *prezzi relativi* (eq. (3.4)). In particolare *non* si può dire che, in generale,

$$\frac{\partial x_{im}}{\partial p_m} < 0,$$

a causa della possibile presenza di un effetto di reddito di segno opposto e di valore assoluto maggiore dell'effetto di sostituzione (è il caso dei cosiddetti "beni di Giffen").

3.1.2 Funzioni di domanda e di offerta totali

Siano

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) := \sum_{i=1}^{I} \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) \tag{3.5}$$

e

$$\bar{\mathbf{x}} := \sum_{i=1}^{I} \bar{\mathbf{x}}_i. \tag{3.6}$$

(3.5) è il vettore delle funzioni di domanda totali e (3.6) è il vettore delle funzioni di offerta totali. Le funzioni di domanda totale "ereditano" le proprietà (3.3) e (3.4) delle funzioni individuali:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{x}(\mathbf{p}^T) = \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{x}} \tag{3.3$'$}$$

e

$$\mathbf{x}(t\mathbf{p}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}), \quad t > 0. \tag{3.4$'$}$$

La (3.3′) è la cosiddetta "legge di Walras", che afferma che il *valore* della domanda totale è uguale al *valore* dell'offerta totale. Una annotazione va fatta a questo proposito: essa non ha nulla a che vedere con l'equilibrio dei mercati, che è costituito, come vedremo, dall'uguaglianza delle *quantità* domandate e offerte su ciascun mercato. Si tratta di una proprietà che lega il *valore* di tutte le funzioni di domanda e di offerta, che deriva dal fatto che le funzioni individuali di domanda soddisfano il vincolo di bilancio. Essa, come tale, vale sia in corrispondenza dell'equilibrio dei mercati che fuori dall'equilibrio.

3.1.3 Equilibrio economico generale

Nel contesto della teoria del consumatore i prezzi delle merci sono stati considerati o come dei dati,[4] quando si imposta il problema di scelta ottima, o come ipoteticamente variabili, quando si costruiscono le funzioni di domanda. È venuto ora il momento di analizzare come si determinano i prezzi delle merci nella teoria neoclassica. L'equilibrio economico generale è una situazione nella quale

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) \leq \bar{\mathbf{x}}. \tag{3.7}$$

Il problema principale della teoria dell'equilibrio economico generale è verificare se esista o meno un vettore $\mathbf{p}$ che soddisfa la (3.7). Walras (1874)

[4] Ciò è giustificato dal fatto che si analizza un sistema economico in concorrenza perfetta.

ha formulato questo problema in termini di equazioni (anziché disequazioni) e poi si è limitato a contare equazioni e incognite:

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{x}} \tag{3.8}$$

sono M equazioni in M incognite (i prezzi). Come si può osservare facilmente il sistema (3.8) contiene al più $M-1$ equazioni indipendenti.[5] Pertanto il sistema (3.8) è in grado di determinare solo i *prezzi relativi*; un prezzo dovrà essere fissato esogenamente al sistema e normalmente viene fissato pari a 1; la corrispondente merce sarà il *numerario* del sistema dei prezzi.

La dimostrazione di esistenza di Walras poggia dunque sul conteggio delle equazioni e delle incognite. I limiti di tale approccio sono sostanzialmente due. Prima di tutto il conteggio di equazioni indipendenti e incognite—che basterebbe ad assicurare l'esistenza di soluzioni di un sistema di equazioni lineari—non basta ad assicurare l'esistenza di una soluzione di equilibrio economico generale, in quanto le funzioni in gioco (le funzioni di domanda) non sono lineari. In secondo luogo il conteggio non esclude la presenza di soluzioni negative, che non sarebbero significative dal punto di vista economico.

L'approccio più moderno (introdotto da von Neumann (1938) e Arrow e Debreu (1954)) si basa prima di tutto su una definizione più generale di equilibrio, in base alla quale si ha equilibrio se la domanda è minore o uguale all'offerta su tutti i mercati,

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) \leq \bar{\mathbf{x}}; \tag{3.11}$$

[5]Per verificare ciò si osservi che le funzioni di domanda totali soddisfano per costruzione la cosiddetta "legge di Walras" (l'equazione (3.3′)), che, per comodità scriviamo qui in forma estesa:

$$p_1 x_1(\mathbf{p}) + \cdots + p_m x_m(\mathbf{p}) + \cdots + p_M x_M(\mathbf{p}) = p_1 \bar{x}_1 + \cdots + p_m \bar{x}_m + \cdots + p_M \bar{x}_M. \tag{3.3″}$$

Una conseguenza immediata della 3.3″ è che se $M-1$ mercati sono in equilibrio risulta automaticamente in equilibrio anche l'M-esimo. Supponiamo infatti che le prime $M-1$ equazioni del sistema (3.8) siano soddisfatte (si potrebbe ripetere lo stesso ragionamento per qualsiasi altro insieme di $M-1$ equazioni). Ciò significa che

$$x_1(\mathbf{p}) = \bar{x}_1, \quad \ldots, \quad x_m(\mathbf{p}) = \bar{x}_m, \quad \ldots, \quad x_{M-1}(\mathbf{p}) = \bar{x}_{M-1}. \tag{3.9}$$

Sostituendo le (3.9) nella (3.3″) i primi $M-1$ addendi si semplificano, e quest'ultima si riduce a $p_M x_m(\mathbf{p}) = p_M \bar{x}_M$, cioè

$$x_M(\mathbf{p}) = \bar{x}_M \quad (\text{per } p_M \neq 0), \tag{3.10}$$

che è appunto la condizione di equilibrio sull'm-esimo mercato. Ciò significa che una delle equazioni del sistema (3.8) è linearmente dipendente dalle altre, cioè che il sistema (3.8) contiene solo $M-1$ equazioni linearmente indipendenti.

in secondo luogo la prova di esistenza di un vettore **p** non-negativo che soddisfa la (3.11) si basa su tecniche matematiche più sofisticate (in particolare i teoremi del punto fisso), che si sono diffuse fra gli economisti solo a partire dai primi anni '50 grazie ai lavori di Von Neumann.[6]

3.1.4 Ottimalità dell'equilibrio walrasiano (cenni)

Uno dei risultati più rilevanti, a fianco della dimostrazione di esistenza di un equilibrio walrasiano, è quello della prova delle sue caratteristiche di "efficienza" in una accezione che è stata definita in maniera precisa da Vilfredo Pareto. Secondo Pareto una allocazione è giudicata efficiente se non è possibile aumentare il livello di utilità di nessun individuo senza dover ridurre quello di un altro. Si può dimostrare che un equilibrio walrasiano è Pareto-efficiente. Questo risultato, che va sotto il nome di "primo teorema dell'economia del benessere", ha costituito la base scientifica a sostegno del libero mercato. Va tuttavia fatto notare che esso è valido all'interno dei limiti posti dalle ipotesi su cui è costruito il modello: informazione completa circa tutti gli elementi rilevanti nelle scelte degli agenti, assenza di esternalità e di beni pubblici, e concorrenza perfetta tra gli agenti. Quest'ultima ipotesi risulta cruciale e impone che gli individui siano sufficientemente nu-

[6] La dimostrazione di esistenza, che qui non riportiamo, in quanto va oltre le intenzioni di questi appunti, possiede un corollario che incorpora un certo interesse economico. Sia $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{o}$ quel vettore non-negativo che assicura l'equilibrio sui mercati e si supponga che in corrispondenza di $\mathbf{p}^*$ le condizioni di equilibrio siano soddisfatte col segno di disuguaglianza stratta per una o più merci; indicando con $\mathcal{M}$ l'insieme delle merci si ha pertanto

$$x_m(\mathbf{p}^*) < \bar{x}_m, \quad m \in \mathcal{M}_1 \tag{3.12a}$$

$$x_m(\mathbf{p}^*) = \bar{x}_m, \quad m \in \mathcal{M}_2, \tag{3.12b}$$

$$\text{dove} \quad \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset.$$

Sostituendo la (3.12) nella (3.3′) si vede che in quest'ultima si semplificano tutti gli addendi relativi alle merci del sottoinsieme $\mathcal{M}_2$, e la (3.3′) si riduce a

$$\sum_{m\in\mathcal{M}_1} p^*_m x_m(\mathbf{p}^*) = \sum_{m\in\mathcal{M}_1} p^*_m \bar{x}_m,$$

cioè

$$\sum_{m\in\mathcal{M}_1} p^*_m [x_m(\mathbf{p}^*) - \bar{x}_m] = 0. \tag{3.13}$$

Dalle (3.12a) si deduce che tutti i termini fra parentesi quadrate della (3.13) sono strettamente negativi. Poiché $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{o}$ si deduce che deve essere $p^*_m = 0$ per $m \in \mathcal{M}_1$; pertanto tutti quelle merci che in equilibrio presentano un eccesso di offerta hanno prezzo nullo: tali merci vengono chiamate *beni liberi*.

merosi da non essere in grado di influenzare in maniera significativa i prezzi di mercato con le proprie decisioni (quindi va esclusa qualsiasi situazione di oligopolio o di monopolio). Un ampio filone di letteratura ha indagato i cosiddetti "fallimenti del mercato" nel raggiungere la Pareto-efficienza che si verificano al venir meno di ciascuna delle suddette ipotesi.

3.1.5 Numerosità degli equilibri (cenni)

Un altro aspetto che ha interessato gli studiosi dell'equilibrio economico generale, con esiti indubbiamente meno favorevoli, è stato quello relativo alla numerosità delle configurazioni di equilibrio economico generale. Difatti non si è riusciti a dimostrare l'unicità dell'equilibrio; questo è sicuramente un aspetto problematico per una teoria che ha come scopo quello di "predire" il funzionamento di un'economia di mercato e di evidenziarne le caratteristiche di efficienza. Per renderci conto della possibile presenza di più equilibri nel modello walrasiano consideriamo il caso semplificato di un'economia con sole due merci, in modo da affrontare il problema dal punto di vista grafico. Per quanto si è detto la legge di Walras consente di studiare l'equilibrio solo su uno di questi due mercati, in quanto l'equilibrio su un mercato si ha se e solo se si ha equilibrio sull'altro. Concentriamo l'attenzione pertanto sul primo mercato e consideriamo un caso in cui l'equilibrio avvenga mediante *uguaglianza* della domanda con l'offerta:

$$x_1(p_1, p_2) = \bar{x}_1; \tag{3.14}$$

poiché le funzioni di domanda sono omogenee di grado 1 (cfr. eq. (3.4′)) la (3.14) è equivalente a $x_1(tp_1, tp_2) = \bar{x}_1, \quad \forall t \neq 0$. Fissando $t = 1/p_2$ essa diventa $x_1(p_1/p_2, 1) = \bar{x}_1$; ponendo $p = p_1/p_2$ l'equazione di equilibrio può essere scritta come $x_1(p, 1) - \bar{x}_1 = 0$; definiamo ora con $e_1(p) := x_1(p, 1) - \bar{x}_1$ la funzione di *eccesso di domanda* della merce 1. La condizione (3.14), che assicura l'equilibrio sul mercato 1 (e di conseguenza anche sul mercato 2) può essere scritta nella forma:

$$e_1(p) = 0. \tag{3.14′}$$

Sotto ipotesi ragionevoli si può dimostrare che $\lim_{p \to 0^+} e_1(p) = +\infty$ e che $\lim_{p \to +\infty} e_1(p) = -\infty$. Graficamente, pertanto, l'equilibrio walrasiano può essere rappresentato dal punto (W) di intersezione della funzione di eccesso di domanda con l'asse delle ascisse (cfr. figura 3.2). Tuttavia, però, la funzione di eccesso di domanda non è necessariamente decrescente (in quanto, come

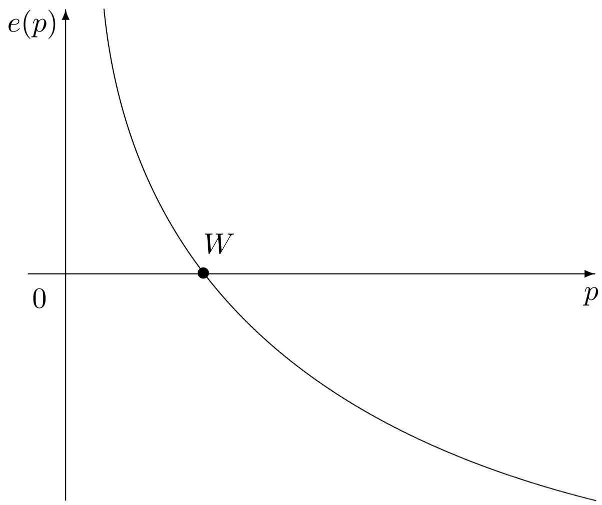

Figura 3.2: Equilibrio walrasiano

si è accennato nel paragrafo 3.1.1 non si riesce a dimostrare la decrescenza delle funzioni di domanda); possono pertanto capitare situazioni come quella indicata nella figura 3.3.

Al limite, introducendo l'ipotesi di differenziabilità della funzione di utilità è possibile escludere la possibilità di avere dei *continuum* di equilibri come quello rappresentato nella figura 3.3; non si riesce però a escludere la possibile molteplicità di equilibri walrasiani isolati.

3.1.6 Stabilità degli equilibri (cenni)

Finora ci è posti il problema di verificare l'*esistenza* e la numerosità degli equilibri walrasiani, ma non si è affrontato il problema di come in un'economia come quella descritta si vada effettivamente a stabilire il (un) sistema di prezzi di equilibrio walrasiano. Il problema è rilevante, in quanto nell'economia descritta non c'è un pianificatore centrale, che potrebbe imporre il sistema dei prezzi di equilibrio; al contrario le decisioni di acquisto e vendita sono prese liberamente dai singoli agenti in maniera indipendente l'uno dall'altro. In altri termini ci si potrebbe porre il problema di se e come il sistema, partendo da un vettore di prezzi qualunque (non di equilibrio), $\mathbf{p}$, riesce a raggiungere la configurazione di equilibrio walrasiano, $\mathbf{p}^*$. Il proble-

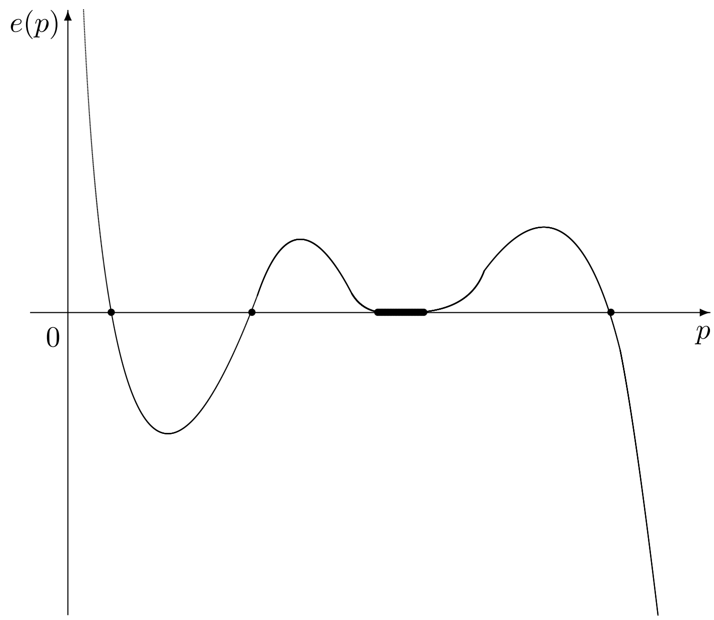

Figura 3.3: Molteplicità di equilibri walrasiani

ma è stato affrontato da Walras supponendo che quando il sistema si trova fuori dall'equilibrio il "mercato" tenda ad aumentare i prezzi delle merci in eccesso di domanda e a ridurre i prezzi delle merci in eccesso di offerta. Questi aggiustamenti sarebbero in grado di far convergere il sistema economico in esame verso gli equilibri W^* e $\tilde{W}$, non verso l'equilibrio $\hat{W}$ (si veda la figura 3.4). Si consideri infatti un livello iniziale del prezzo relativo della merce 1 in termini della merce 2, $\bar{p}_0$, inferiore al prezzo di equilibrio walrasiano $\bar{p}^*$. In corrispondenza di $\bar{p}_0$ si verifica un eccesso di domanda della merce 1; ciò porterà, secondo il processo descritto da Walras, a un aumento del prezzo fino a che l'eccesso di domanda si annulla, cioè fino al raggiungimento di $\bar{p}^*$. In tal caso si dice che l'equilibrio $\bar{W}$ è un *equilibrio localmente stabile*; se per una qualunque causa accidentale tale equilibrio venisse perturbato (di poco) il sistema sarebbe in grado di sviluppare al suo interno quelle forze per ripristinarlo. Analogo discorso si può fare per l'equilibrio $\tilde{W}$: in corrispondenza del prezzo $\tilde{p}_0$ si verifica un eccesso di domanda negativo, cioè un eccesso di offerta di merce 1; in tal caso p diminuirà facendo convergere il sistema verso l'equilibrio $\tilde{W}$, che sarà, pertanto, un equilibrio *localmente stabile.* Al contrario l'equilibrio $\hat{W}$ sarà un *equilibrio instabile*, in quanto se il sistema si trovasse esattamente in tale equilibrio tale posizione verrebbe mantenuta, ma non appena tale equilibrio subisse una seppur piccola perturbazione esso si allontanerebbe indefinitamente da $\hat{W}$, finendo col convergere o all'equilibrio $\bar{W}$ o all'equilibrio $\tilde{W}$. Come "regola" grafica possiamo dire che gli equilibri in corrispondenza dei quali la curva di eccesso di domanda attraversa l'asse delle ascisse con *inclinazione negativa* sono localmente stabili e, viceversa, sono instabili quelli per i quali la curva di eccesso di domanda attraversa l'asse delle ascisse con *inclinazione positiva*. L'analisi di stabilità pone però parecchi problemi che non emergono dal semplice esempio grafico qui considerato. Intanto bisognerebbe stabilire chi varia i prezzi in relazione agli eccessi di domanda o di offerta registrati. Walras ha inventato la famosa figura del "banditore", ma si tratta evidentemente di una finzione analitica, che non si riscontra nei mercati reali (salvo qualche eccezione). Inoltre il fatto che le funzioni di domanda delle merci (e, di conseguenza, le curve di eccesso di domanda) non siano sempre inclinate negativamente può condurre a equilibri instabili, come si è visto, ad esempio, nel caso dell'equilibrio $\hat{W}$. Un altro problema aperto è rappresentato dal fatto che i processi di aggiustamento all'equilibrio richiedono tempo, durante il quale è verosimile che avvengano degli scambi, seppur a prezzi non di equilibrio. Tali scambi influenzano le quantità domandate e offerte delle varie merci, spostando così la configurazione di equilibrio che doveva essere raggiunta con quegli aggiustamenti. Una scappatoia analitica è stata quella di supporre che gli scambi avvengano soltanto una volta raggiunta la posizione di equilibrio e non prima. Si tratta evidentemente di un'ipotesi non accettabile economicamente, la cui rimozione, però, complica notevolmente l'analisi. Per queste e per altre ragioni anche l'analisi di stabilità degli equilibri walrasiani sembra lontana dall'aver raggiunto risultati economicamente soddisfacenti.

3.1.7 Generalizzazioni del modello (cenni)

Il modello esposto presenta evidenti limitazioni dovute alle ipotesi estremamente semplificatrici sulla base delle quali è stato costruito: non considera il fenomeno della produzione delle merci (anche se la maggior parte delle merci oggetto di scambio sono beni prodotti e non beni già disponibili in natura), è un modello statico (descrive una situazione di equilibrio riferibile a un dato istante di tempo, senza descrivere ciò che è avvenuto prima e ciò che avviene dopo), e presuppone che tutti gli individui conoscano perfettamente e senza incertezza tutti gli elementi presenti e futuri rilevanti nella formulazione delle loro scelte. Come si è però detto all'inizio tale modello costituisce il modello "minimale" della teoria neoclassica, quello che descrive ciò che questo filone teorico ritiene siano gli elementi più importanti per

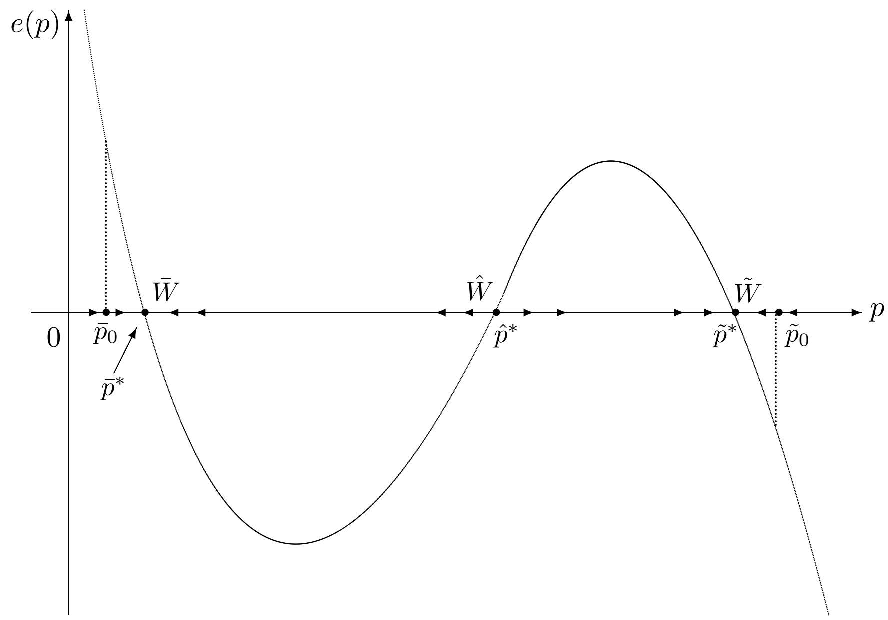

Figura 3.4: Stabilità degli equilibri walrasiani

la comprensione dei fenomeni relativi al funzionamento dei mercati e del sistema economico in generale. In altri termini è un'astrazione che serve per cogliere con nitidezza le forze principali operanti in un sistema economico, sfrondate da tutto ciò che costituisce invece solo una complicazione di questi meccanismi. Ecco che infatti gli studiosi dell'equilibrio economico generale hanno poi cercato di superare queste limitazioni, reintegrando nel modello di scambio tutte quelle "complicazioni" che sono state lasciate fuori dalla versione "minimale". La loro reintegrazione, come vedremo, sarà però fatta in maniera tale da non stravolgere la logica del modello di scambio. Il fenomeno della produzione sarà infatti introdotto in maniera tale da essere riconducibile a un problema di scambio: i beni scambiati saranno i fattori di produzione (offerti dagli individui e domandati dalle imprese) e le merci prodotte (offerte dalle imprese e domandate dagli individui).[7])

Gli aspetti temporali saranno introdotti, almeno in prima battuta, distinguendo le varie merci non solo in relazione alle loro caratteristiche fisiche, ma anche in relazione all'istante temporale in cui verranno ad essere disponibili; pertanto la stessa merce fisica sarà considerato un bene diverso a seconda che sia disponibile "oggi", tra un "anno", tra due, ecc. Per fare questa di-

[7]Nella sezione successiva vedremo un'esempio di questa estensione

stinzione basta apporre un ulteriore indice a ciascuna quantità e a ciascun prezzo, che indichi l'istante temporale in cui la merce sarà disponibile: x_{mt} indicherà pertanto la quantità di merce m disponibile al tempo t, e p_{mt} il suo prezzo. Analiticamente la merce (m, t) può essere considerata come una merce distinta dalla merce (m, τ); se nell'analisi si considerano T istanti la considerazione degli aspetti temporali porterà solo a un aumento del numero dei beni (e corrispondentemente dei mercati, dei prezzi e delle funzioni di domanda e offerta e delle disequazioni che definiscono l'equilibrio) da M a MT. La stessa impalcatura teorica e le stesse dimostrazioni di esistenza dell'equilibrio walrasiano potranno essere automaticamente applicate a questo caso.

Un metodo analogo si seguirà per trattare il fenomeno dell'incertezza: una stessa merce, disponibile in diversi stati del mondo, sarà considerata una merce diversa, a seconda dello stato del mondo s in cui sarà disponibile; indicando con S il numero dei possibili stati del mondo, l'apposizione di un ulteriore indice a quantità e prezzi (x_{mts} e p_{mts}) porterà a un modello con MTS mercati, prezzi, ecc. Tutto ciò ha evidentemente qualche legame con la realtà (il prezzo del petrolio fra un anno in caso di guerra sarà diverso dal prezzo del petrolio oggi se non c'è la guerra), ma impone un insieme limitazioni all'analisi forse ancora più grandi di quelle che voleva eliminare: bisogna presupporre l'esistenza di mercati per tutte le merci in corrispondenza di tutti gli istanti temporali e di tutti gli stati del mondo considerati dall'analisi, un'ipotesi evidentemente irrealistica. A questo proposito è stata sviluppata dai teorici dell'equilibrio economico generale una vasta letteratura che analizza esplicitamente il caso di *incompletezza* dei mercati a termine; è questo un campo di analisi non del tutto esplorato, nel quale sono stati presentati diversi risultati economicamente interessanti, anche se la letteratura a questo riguardo è abbastanza complicata dal punto di vista analitico-formale.

Da ultimo i problema delle asimmetrie delle informazioni di cui dispongono i vari individui quando effettuano le loro scelte ha costituito e costituisce un fecondo campo di analisi della moderna teoria microeconomica.

3.2 Teoria marginalista aggregata della produzione e della distribuzione

Vediamo ora un modello di equilibrio economico generale con produzione. Semplifichiamo al massimo l'analisi, liberandoci da tutti quegli elementi che alcuni economisti neoclassici non ritengono essere elementi centrali per la spiegazione di tale fenomeno (la produzione) e tutti gli argomenti ad esso connessi.

3.2.1 Descrizione della tecnologia

Il sistema economico è visto come un unico "grande" imprenditore che produce una merce finale, Y, impiegando terra (T) e lavoro (L). La tecnologia è rappresentata dalla "funzione aggregata di produzione":

$$Y = F(T, L).$$

La funzione di produzione associa a ogni "tecnica di produzione", rappresentata da una coppia di valori di valori indicanti l'impiego di terra e di lavoro, il corrispondente massimo livello ottenibile di produzione della merce (aggregata) finale. Fra tutte le (infinite) tecniche individuate in questo modo una è quella che sarà effettivamente adottata. In ciò che segue vedremo come viene effettuata la scelta della tecnica di produzione e le determinanti di tale scelta. Si supporrà che il sistema economico selezioni quella tecnica che massimizza l'extra-profitto, date le conoscenze tecnologiche. Analogamente a ciò che si è visto nella teoria del consumatore, dalla soluzione di questo problema si otterranno le funzioni di domanda di terra e di lavoro e la funzione di offerta del prodotto. Anziché addentrarci subito nello studio di tali aspetti riformuliamo il modello per tener conto della presenza anche di fattori di produzione prodotti (beni capitali) a fianco dei fattori primari (terra e lavoro). Questa estensione è stata elaborata, almeno nelle versioni più semplici (ma più diffuse) della teoria neoclassica, semplicemente aggiungendo un terzo elemento, il capitale (K), alla lista degli argomenti della funzione aggregata di produzione,

$$Y = F(K, L, T),$$

e considerando l'insieme dei beni capitali come un unico fattore di produzione (aggregato) allo stregua di un fattore di produzione originario. Ovviamente siccome il capitale è una merce prodotta esso sarà fisicamente omogeneo con la merce Y. Seguendo un'abitudine ormai diffusa nella letteratura, in ciò che segue, per semplicità, considereremo solo due fattori di produzione, il capitale e il lavoro, cosicché la funzione di produzione aggregata a cui si farà riferimento sarà

$$Y = F(K, L). \tag{3.15}$$

Per la funzione F supponiamo che valgano le seguenti ipotesi:

1. $F(K, L)$ è definita, continua e possiede derivate parziali prime e seconde continue per $K \geq 0$, $L \geq 0$; inoltre $F(0, 0) = F(K, 0) = F(0, L) = 0$ e $F(K, L) \geq 0$ per $K \geq 0$, $L \geq 0$;
2. (a) $\dfrac{\partial F}{\partial K} \geq 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial L} \geq 0$;
   (b) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} \leq 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} \leq 0$ (rendimenti *marginali* decrescenti di capitale e lavoro);
3. F è omogenea di primo grado,[8] ossia $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ per ogni $\lambda > 0$; ciò implica rendimenti *di scala* costanti.

Graficamente è possibile rappresentare la tecnologia così descritta mediante l'insieme delle curve di livello della funzione F, dette *isoquanti*:

$$F(K, L) = \bar{Y};$$

ciascuna di tali curve rappresenta l'insieme delle combinazioni di capitale e di lavoro che permettono di ottenere un dato livello di produzione, $\bar{Y}$. Lungo ciascuna di esse il differenziale totale della funzione di produzione è nullo, in quanto le variazioni di capitale e lavoro devono essere tali da lasciare inalterata la quantità di merce finale prodotta:

$$\mathrm{d}Y \equiv \frac{\partial F}{\partial K}\mathrm{d}K + \frac{\partial F}{\partial L}\mathrm{d}L = 0.$$

La pendenza degli isoquanti è pertanto misurata dalla derivata:

$$\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}K}\right|_{Y=\bar{Y}} = -\frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L}, \tag{3.16}$$

che viene chiamata *saggio marginale di sostituzione tecnica*; d'ora in poi indicheremo tale derivata con il simbolo SMST:

$$\mathrm{SMST} := \left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}K}\right|_{Y=\bar{Y}}.$$

SMST indica il rapporto fra le variazioni (infinitesimali) delle quantità impiegate di capitale e lavoro che lasciano invariato un dato livello di produzione, quindi misura l'inclinazione degli isoquanti. Dall'ipotesi 2a si ha che

$$\mathrm{SMST} < 0,$$

[8]Una funzione $y = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si dice *omogenea di grado s*, $s \in \mathcal{N}$, se $g(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^s g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ per ogni $\lambda \neq 0$.

cioè che gli isoquanti sono decrescenti. Dalle ipotesi 2 e 3 si ha che essi sono convessi (cfr. Appendice 3.A) pertanto il saggio marginale di sostituzione tecnica crescerà (decrescerà in valore assoluto) al crescere di K:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{SMST}}{\mathrm{d}K} > 0 \quad \mathrm{e} \quad \frac{\mathrm{d}\,|\mathrm{SMST}|}{\mathrm{d}K} < 0. \tag{3.17}$$

Inoltre dall'ipotesi 3 si ha che il SMST è costante lungo tutte le semirette (raggi) uscenti dall'origine. Infatti poiché $F(K,L)$ è omogenea di primo grado si sa, grazie a un teorema sulle funzioni omogenee,[9] che le sue derivate parziali sono funzioni omogenee di grado 0, cioè che $\frac{\partial F}{\partial K}(\lambda K, \lambda L) = \frac{\partial F}{\partial K}(K,L)$ e che $\frac{\partial F}{\partial L}(\lambda K, \lambda L) = \frac{\partial F}{\partial L}(K,L)$, per ogni $\lambda \neq 0$. Ponendo $\lambda = 1/L$ si ottiene

$$\mathrm{SMST} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial K}(K,L)}{\frac{\partial F}{\partial L}(K,L)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial K}(\frac{K}{L},1)}{\frac{\partial F}{\partial L}(\frac{K}{L},1)},$$

da cui si vede che SMST dipende solo dal rapporto fra K e L e non dai loro valori assoluti:

$$\mathrm{SMST} = \mathrm{SMST}\left(\frac{K}{L}\right).$$

Pertanto l'inclinazione di ciascun isoquanto lungo ciascun raggio è costante; questa proprietà viene talvolta espressa dicendo che ciascun isoquanto è la "proiezione radiale" di ciascun altro. Si può da ultimo dimostrare (si veda Appendice 3.B) che SMST non solo cresce (decresce in valore assoluto) al crescere di K (cfr. disequazione (3.17)), ma cresce (decresce in valore assoluto) al crescere del rapporto K/L, cioè

$$\frac{\mathrm{dSMST}}{\mathrm{d}\left(\frac{K}{L}\right)} > 0 \quad \mathrm{e} \quad \frac{\mathrm{d}|SMST|}{\mathrm{d}\left(\frac{K}{L}\right)} < 0. \tag{3.18}$$

Nella Figura 3.5 sono stati rappresentati due isoquanti corrispondenti a due diversi livelli di produzione, $\bar{Y}_1$ e $\bar{Y}_2$ (dall'ipotesi 2a si ha che $\bar{Y}_1 < \bar{Y}_2$).

Esempio 3.2 (Calcolo del SMST) *Si supponga che la funzione aggregata di produzione sia di tipo Cobb-Douglas, $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$; si ha:*

$$\mathrm{SMST} = -\frac{\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{(1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha}} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{L}{K}.$$

Si osservi come il SMST *trovato sia negativo, dipenda dal* rapporto K/L *e sia funzione monotona decrescente di quest'ultimo.*

□

[9] Cfr., ad esempio, Yamane (1972, pp. 183-4).

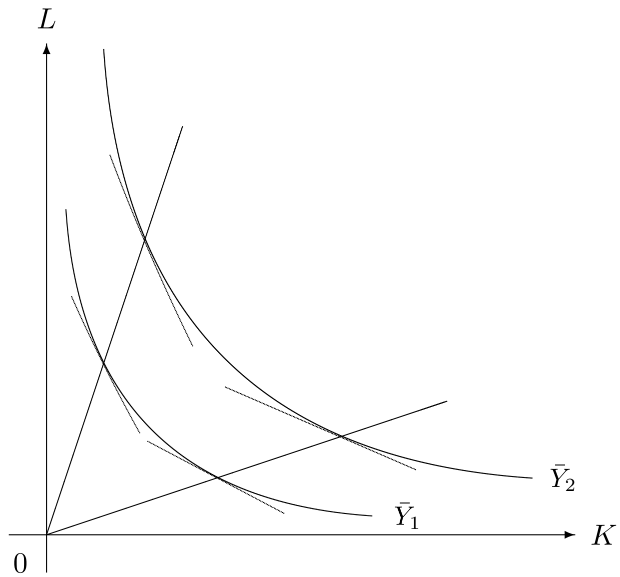

Figura 3.5: Isoquanti corrispondenti a due diversi livelli di produzione

3.2.2 Scelta della tecnica di produzione

Fra tutte le (infinite) tecniche di produzione, si è detto, si suppone che il sistema nel suo insieme agisca come un imprenditore che seleziona quella che massimizza l'extra-profitto, cioè la differenza fra il valore del prodotto e i costi di produzione (profitti più salari). Tale tecnica è soluzione del seguente problema di massimizzazione vincolata:

$$\max_{Y,K,L} pY - \pi K - wL, \quad \text{s.v.} \quad Y = F(T, L), \tag{3.19}$$

dove p indica il prezzo della merce finale e π e w indicano, rispettivamente, il prezzo per l'uso del capitale e il prezzo del lavoro. Per l'ipotesi di concorrenza perfetta p, π e w sono considerati come dati in questo stadio dell'analisi.

Sostituendo il vincolo nella funzione obiettivo si ottiene un problema di massimizzazione libera:

$$\max_{K,L} pF(K, L) - \pi K - wL; \tag{3.19$'$}$$

le condizioni di primo ordine per un massimo si possono esprimere nella forma:

$$\frac{\partial F}{\partial K}(K,L) = \frac{\pi}{p} \tag{3.20a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L}(K,L) = \frac{w}{p}. \tag{3.20b}$$

Il rapporto π/w può essere visto come il saggio di rendimento del capitale o saggio di profitto, in quanto rapporto fra il prezzo d'uso e il prezzo d'acquisto del bene capitale: il rapporto w/p costituisce invece il salario reale. Dalle (3.20) si vede che la tecnica ottima è tale per cui le produttività marginali di capitale e lavoro si uguagliano, rispettivamente, al saggio di profitto e al salario reale. Dividendo la (3.20a) per la (3.20b) si ottiene

$$-\frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L} \equiv \text{SMST}\left(\frac{K}{L}\right) = -\frac{\pi}{w}. \tag{3.21}$$

risolvendo rispetto a K/L si ottiene il rapporto ottimo di impiego fra capitale e lavoro come funzione del rapporto tra i prezzi dei fattori:

$$\frac{K}{L} = h\left(\frac{\pi}{w}\right). \tag{3.22}$$

Poiché si è provato che il SMST è una funzione decrescente di K/L (cfr. eq. (3.18), la relazione fra K/L e π/w individuata dalla (3.21) (o dalla sua inversa, la (3.22)), è monotona e decrescente.

3.3 Funzioni di domanda e di offerta dei fattori

La condizione (3.22) di ottimalità nelle proporzioni di impiego dei fattori, congiuntamente al vincolo del problema di massimizzazione $Y = F(K,L)$, definiscono implicitamente le quantità domandate di capitale e lavoro in corrispondenza di ciascun prezzo relativo dei fattori produttivi (π/w). Tali quantità dipenderanno però anche dalla quantità totale di merce prodotta, Y.

$$K^d = K^d\left(\frac{\pi}{w}, Y\right) \equiv Y \cdot k^d\left(\frac{\pi}{w}\right), \tag{3.23a}$$

$$L^d = L^d\left(\frac{\pi}{w}, Y\right) \equiv Y \cdot l^d\left(\frac{\pi}{w}\right). \tag{3.23b}$$

La dipendenza di K^d e di L^d da Y può essere provata rigorosamente, (si veda appendice 3.C) ma è abbastanza intuitiva, in quanto la (3.22) individua, per ogni livello di π/w, la *proporzione* ottima di impiego fra capitale e lavoro, non il loro livello assoluto; per conoscere quest'ultimo bisogna fissare esogenamente al problema (3.19) il livello di produzione, Y (detto in altri termini le scelte imprenditoriali individuano, per ogni dato prezzo relativo dei fattori, π/w, le loro *proporzioni* ottime di impiego; il *livello assoluto* di impiego è determinato dalla dimensione del mercato). Inoltre si può provare che (cfr. Appendice 3.C):

$$\frac{\partial K^d}{\partial\left(\frac{\pi}{w}\right)} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L^d}{\partial\left(\frac{w}{\pi}\right)} < 0.$$

Esempio 3.3 (Ottenimento delle funzioni di domanda dei fattori) *Si supponga che la funzione aggregata di produzione sia di tipo Cobb-Douglas, $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$; la tecnica ottima è soluzione del problema*

$$\max_{K,L} pK^\alpha L^{1-\alpha} - \pi K - wL;$$

le condizioni del primo ordine sono:

$$p\alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} = \pi$$

$$p(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = w.$$

Dividendo membro a membro la prima condizione con la seconda si ottiene $L = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\pi}{w}K$; sostituendo questa espressione di L nella funzione di produzione $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$ e esplicitando rispetto a K si ottiene la funzione di domanda del capitale

$$K = K^d\left(\frac{\pi}{w}, Y\right) = Y \cdot \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\pi}{w}\right)^{\alpha-1}.$$

Sostituendo questa espressione trovata per K nella funzione di produzione aggregata si ottiene la funzione di domanda di lavoro:

$$L = L^d\left(\frac{\pi}{w}, Y\right) = Y \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{\pi}{w}\right)^{\alpha}.$$

□

Le (3.23) costituiscono, si è detto, le *funzioni di domanda* di capitale e lavoro. Indichiamo poi le "dotazioni" di capitale e di lavoro, rispettivamente, con $\bar{T}$ e con $\bar{L}$. Supponiamo, per semplicità, che le *funzioni di offerta* di tali fattori siano rigide:

$$K^s = \bar{K} \tag{3.24a}$$

$$L^s = \bar{L}. \tag{3.24b}$$

3.3.1 Funzioni di domanda e offerta del bene prodotto

Il bene prodotto viene domandato dagli individui che compongono il sistema in esame, che sono i capitalisti e i lavoratori. Poiché è l'unico bene esistente si suppone che essi spendano tutto il loro reddito per acquistarlo, dato da profitti e salari. Da ciò si ottiene la *funzione di domanda del bene prodotto*:

$$Y^d := (\pi K^s + w L^s)/p. \tag{3.25}$$

D'altra parte l'intero sistema produttivo offre il bene finale e domanda i fattori di produzione; la funzione di produzione, che sintetizza il legame tra queste grandezze costituisce anche la *funzione di offerta del bene prodotto*:

$$Y^s := F(K^d, L^d). \tag{3.26}$$

3.3.2 Equilibrio generale - teoria della distribuzione

Abbiamo ora tutte le funzioni necessarie per definire l'equilibrio generale dei mercati:

$$\begin{aligned}
&K^d := Y^s \cdot k^d(\pi/w) && \text{(eq. (3.23a))}\\
&K^s := \bar{K} && \text{(eq. (3.24a))}\\
&K^d = K^s && (3.27)\\
&L^d := Y^s \cdot l^d(\pi/w) && \text{(eq. (3.23b))}\\
&L^s := \bar{L} && \text{(eq. (3.24b))}\\
&L^d = L^s && (3.28)\\
&Y^d := (\pi K^s + w L^s)/p && \text{(eq. (3.25))}\\
&Y^s := F(K^d, L^d) && \text{(eq. (3.26))}\\
&Y^d = Y^s. && (3.29)
\end{aligned}$$

Sostituendo le (3.23a) e (3.24a) nella (3.27), le (3.23b) e (3.24b) nella (3.28) e la (3.24) nelle (3.25) e (3.26) e queste ultime nella (3.29) il sistema che definisce l'equilibrio generale si riduce a

$$\bar{Y} \cdot k^d(\pi/w) = \bar{K} \tag{3.30a}$$

$$\bar{Y} \cdot l^d(\pi/w) = \bar{L} \tag{3.30b}$$

$$(\pi \bar{K} + w \bar{L})/p = \bar{Y}, \tag{3.30c}$$

dove $\bar{Y} = F(\bar{K}, \bar{L})$. (3.30) è un sistema di tre equazioni in tre incognite, π, w e p. Tuttavia le prime due sono due equazioni nella stessa incognita, π/w e si può verificare che esse coincidono.[10] Quindi l'intero sistema (3.30) viene ad essere composto da due equazioni indipendenti in tre incognite; si ha pertanto un grado di libertà che, al solito, può essere chiuso fissando un prezzo pari a 1. Fisseremo

$$p = 1 \tag{3.31}$$

esprimendo così il prezzo d'uso del capitale e del lavoro in termini del bene prodotto. Sotto le ipotesi 1-3 (più qualche ulteriore ipotesi "tecnica" sul comportamento della funzione di produzione agli estremi del campo di esistenza) si può dimostrare che il sistema (3.30) ammette sempre una soluzione economicamente significativa; esistono cioè dei prezzi relativi non-negativi che garantiscono l'equilibrio fra domanda e offerta su tutti i mercati.

Si noti da ultimo che data la tecnologia e date le dotazioni dei fattori rimane univocamente determinato l'ammontare massimo del bene finale producibile, $\bar{Y} = F(\bar{K}, \bar{L})$); d'altra parte profitti e salari sono determinati dalle produttività marginali, rispettivamente, di capitale e lavoro. Bisogna verificare se la quantità di bene finale prodotta, $\bar{Y}$, è sufficiente a remunerare capitale e lavoro in base alle rispettive produttività marginali. L'ipotesi che la tecnologia abbia rendimenti di scala costanti assicura che accada ciò, in quanto fa sì che la funzione di produzione sia omogenea di primo grado; F, pertanto, soddisfa il teorema di Eulero,[11] in base al quale vale la seguente identità:

$$Y \equiv \frac{\partial F}{\partial K} K + \frac{\partial F}{\partial L} L, \quad \forall K \geq 0, L \geq 0. \tag{3.32}$$

Considerando che le produttività marginali dei fattori sono uguali a profitti e salari espressi in termini di bene finale (equazioni (3.20) e (3.31)) si ha che

$$Y \equiv \pi K + wL \quad \forall K \geq 0, L \geq 0,$$

cioè che la quantità di bene prodotta e esattamente sufficiente a pagare i fattori in base alle rispettive produttività marginali: l'extra-profitto è nullo. Tale proprietà è nota come "legge di esaurimento del prodotto". Si noti a questo proposito l'importante ruolo giocato dall'ipotesi dell'omogeneità di primo grado della funzione di produzione nella teoria neoclassica della distribuzione.

[10] Si veda appendice 3.D

[11] Si veda Barozzi e Corradi (1985, pp. 404-405)

Esempio 3.4 (Calcolo dell'equilibrio walrasiano) *Si supponga che le funzioni di domanda dei fattori siano quelle ottenute nell'esempio 3.3 e inoltre si supponga che $\alpha = 1/2$; si ha così:*

$$K^d = Y \cdot \left(\frac{\pi}{w}\right)^{-1/2} \quad e \quad L^d = Y \cdot \left(\frac{\pi}{w}\right)^{1/2};$$

supponiamo poi che le funzioni di offerta di capitale e lavoro siano:

$$K^s = 4500 \quad e \quad L^s = 500.$$

L'equilibrio dei mercati si ha quando:

$$Y \cdot \left(\frac{\pi}{w}\right)^{-1/2} = 4500$$
$$Y \cdot \left(\frac{\pi}{w}\right)^{1/2} = 500$$

Risolvendo il sistema rispetto a π/w e rispetto a Y si ha $\pi/w = 1/9$ e $Y = 1500$.

□

L'emergere di questo sistema di prezzi relativi d'equilibrio generale si può vedere rappresentando la condizione (3.21) congiuntamente alle (3.24) (si veda la figura 3.6). Poiché in equilibrio si ha la piena occupazione dei fattori, il punto di equilibrio è pertanto individuato dal punto di coordinate $(\bar{K}, \bar{L})$. Per esso passerà sicuramente un isoquanto, la cui inclinazione in quel punto determinerà—attraverso la (3.21)—il prezzo relativo dei fattori, (π_0/w_0).

3.3.3 Ri-formulazione del modello in termini di grandezze pro-capite

Sfruttando l'ipotesi di omogeneità di primo grado della funzione di produzione è possibile riformulare il problema della scelta della tecnica che massimizza l'extra-profitto in termini di grandezze pro-capite. Questa formulazione della teoria neoclassica della produzione e della distribuzione è utilizzata soprattutto nella macroeconomia e nella teoria dello sviluppo economico. Per l'ipotesi 3 si ha che $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ per ogni $\lambda > 0$; ponendo $\lambda = 1/L$ si ottiene:

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) =: f\left(\frac{K}{L}\right).$$

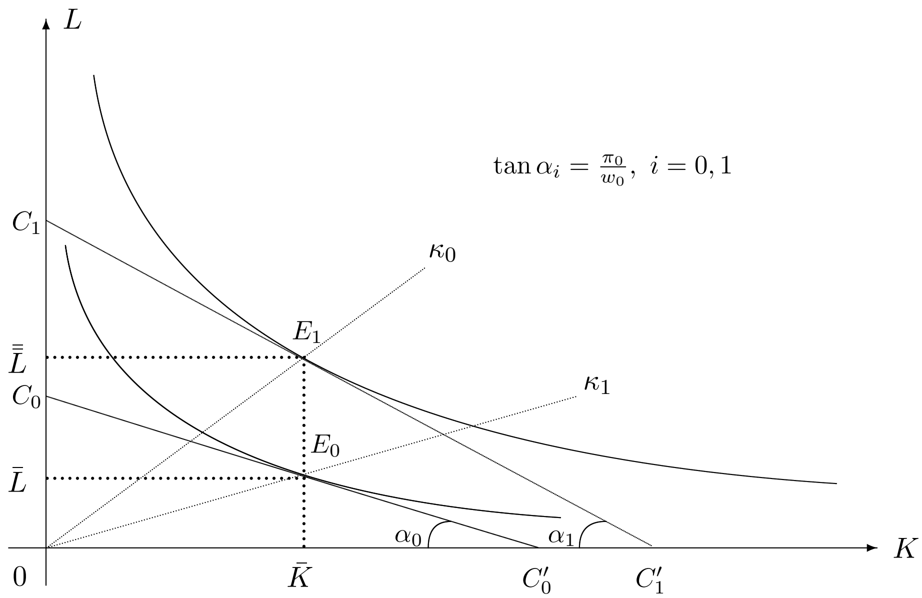

Figura 3.6: Equilibrio sul mercato dei fattori

Definendo $y := Y/L$ prodotto per lavoratore e $k := K/L$ capitale per lavoratore possiamo ri-esprimere la funzione aggregata di produzione in termini pro-capite:

$$y = f(k).$$

L'andamento della funzione $f(k)$ dipende dalle ipotesi fatte sulla funzione $F(K, L)$; in particolare possiamo dire che $f(k)$ è definita, continua e non-negativa per $k \geq 0$; inoltre si dimostra facilmente che[12]

$$f'(k) = \frac{\partial F}{\partial K} > 0 \quad \forall k \geq 0 \tag{3.33a}$$

e

$$f''(k) = L\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \quad \forall k \geq 0. \tag{3.33b}$$

[12]Infatti, poiché $F(K, L) = Lf(K/L)$ si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = Lf'\left(\frac{K}{L}\right)\frac{\mathrm{d}(K/L)}{\mathrm{d}K} = Lf'\left(\frac{K}{L}\right)\frac{1}{L} = f'(k)$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \frac{\partial}{\partial K}\left(f'\left(\frac{K}{L}\right)\right) = f''\left(\frac{K}{L}\right)\frac{\mathrm{d}(K/L)}{\mathrm{d}K} = f''(k)\frac{1}{L}.$$

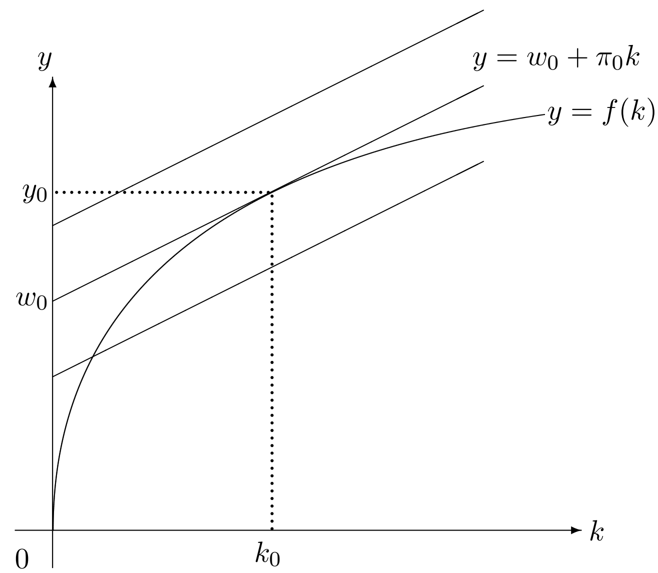

Figura 3.7: Funzione di produzione in termini pro-capite

Si osservi, da ultimo, che dividendo la relazione di Eulero (3.32) per L si ottiene

$$f(k) - kf'(k) = \frac{\partial F}{\partial L}. \tag{3.34}$$

L'andamento di $y = f(k)$ è rappresentato nella Figura 3.7.

La tecnica che massimizza gli extra-profitti è la soluzione del problema di massimo vincolato:

$$\max_{y,k} \phi := py - \pi k - w, \quad \text{s.v.} \quad y = f(k), \tag{3.35}$$

dove ϕ rappresenta l'extra-profitto per lavoratore. Sostituendo il vincolo nella funzione obiettivo e ponendo ancora $p = 1$ il problema (3.35) si riduce a

$$\max_{k} f(k) - \pi k - w, \tag{3.35$'$}$$

la cui soluzione è individuata dalla condizione:

$$f'(k) = \pi. \tag{3.36}$$

Per l'ipotesi di rendimenti di scala costanti la funzione di produzione soddisfa la relazione di Eulero (eq. 3.32). Ricordando che in equilibrio la produttività marginale del lavoro uguaglia il salario reale (eq. (3.20b)) dalla (3.34) si ottiene

$$f(k) - kf'(k) = w. \tag{3.37}$$

Graficamente il problema (3.35) può essere così rappresentato. La funzione obiettivo è rappresentabile con un fascio di rette parallele di equazione

$$y = (\phi + w) + \pi k;$$

lungo ciascuna di queste rette l'extra-profitto per lavoratore è costante; esse costituiscono le cosiddette rette di *isoprofitto*. Per ciascuna di esse, maggiore è la sua intercetta all'origine, $\phi + w$, maggiore è l'extra-profitto che lungo di essa si realizza. La tecnica che massimizza l'extra-profitto per lavoratore è individuata dal punto di $f(k)$ che giace sulla retta di isoprofitto avente intercetta all'origine più elevata. La soluzione (k_0, y_0) è individuata dal punto di tangenza fra la funzione $y = f(k)$ e la retta di isoprofitto più lontana dall'origine (si veda la Figura 3.7). Si noti che poiché il valore massimo (di equilibrio) dell'extra-profitto è nullo – per la legge di esaurimento del prodotto – la retta di isoprofitto passante per (k_0, y_0) ha equazione $y = w_o + \pi_0 k$.

3.3.4 Equilibrio generale - teoria della distribuzione

Possiamo fare riferimento alla figura 3.7. La perfetta flessibilità dei prezzi garantisce, come si è detto, la piena occupazione dei fattori; essi pertanto saranno "assorbiti" dal sistema produttivo nella proporzione in cui si trovano a essere disponibili, cioè $\bar{k} = \bar{K}/\bar{L}$. Il prezzi dei fattori che garantiscono il loro pieno impiego in queste proporzioni potranno essere letti nel grafico della Figura 3.7 come segue: il saggio di profitto di equilibrio sarà misurato dalla pendenza della retta di isoprofitto tangente alla funzione di produzione nel punto $k = \bar{k}$ (eq: (3.36)) e il salario di equilibrio dall'intercetta all'origine della stessa retta di isoprofitto (eq: (3.37)).

3.3.5 Statica comparata

Si è visto che la configurazione di equilibrio del sistema (prezzi relativi e quantità domandate dei fattori) sono determinati una volta date le condizioni tecnologiche (riassunte dalla funzione di produzione) e le dotazioni dei fattori. Analizziamo ora cosa accade se variano le dotazioni dei fattori.

Supponiamo che la dotazione di capitale rimanga invariata a $\bar{K}$, mentre la dotazione di lavoro passi da $\bar{L}$ a $\bar{\bar{L}}(> \bar{L})$. Possiamo analizzare le conse-

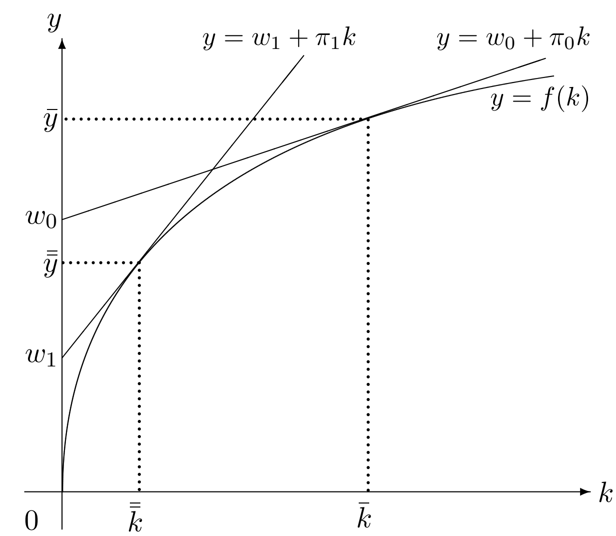

Figura 3.8: Equilibrio generale

guenze di questo cambiamento graficamente sia osservando la figura 3.6 che la figura 3.8.

Dalla figura 3.6 si vede che l'aumento della dotazione di lavoro richiede un mutamento della tecnica produttiva adottata (si passa dal punto E_0 al punto E_1) che permetta l'assorbimento totale delle "nuove" dotazioni di fattori produttivi, $\bar{K}$ e $\bar{\bar{L}}$; a tale scopo i prezzi dei fattori devono variare fino a eguagliare il saggio marginale di sostituzione tecnica nel nuovo punto E_1 di coordinate $(\bar{K}, \bar{\bar{L}})$. Il nuovo prezzo relativo del lavoro rispetto al capitale è misurato dall'inclinazione dell'isocosto C_1C_1', di equazione $L = C_1/w_1 - (\pi_1/w_1)K$. Da questo schema si vede che a fronte di un aumento della dotazione di lavoro il sistema economico reagisce con un aumento del prezzo relativo del capitale rispetto al lavoro, $\pi_1/w_1 > \pi_0/w_0$, che rende conveniente l'adozione di una tecnica a maggior intensità di lavoro: $\kappa_1 \equiv \bar{K}/\bar{\bar{L}} < \bar{K}/\bar{L} \equiv \kappa_0$. Si ha dunque una *relazione monotonica e inversa* fra il prezzo relativo del capitale rispetto al lavoro π/w, e il rapporto di impiego di capitale e lavoro $\kappa := K/L$. La monotonicità inversa di tale relazione esprime il cosiddetto fenomeno della *sostituzione* tra capitale e lavoro.

È possibile pervenire alla stessa conclusione a partire dalla Figura 3.8. Confrontiamo ancore le conseguenze del cambiamento nelle dotazioni prima indicato: si passa dal punto $(\bar{k}, \bar{y})$ al punto $(\bar{\bar{k}}, \bar{\bar{y}}) < (\bar{k}, \bar{y})$; questo movimento lungo la funzione di produzione definisce un nuovo sistema di prezzi dei fattori, $\pi_1 > \pi_0$ e $w_1 < w_0$. A fronte un aumento della dotazione di lavoro il sistema reagisce riducendo il salario unitario e aumentando il saggio di profitto, così da rendere conveniente una *sostituzione* di capitale con lavoro che assicuri la piena occupazione dei fattori.

Appendici al capitolo 3

3.A Convessità degli isoquanti

Per provare la convessità degli isoquanti si calcoli

$$\frac{\mathrm{dSMST}}{\mathrm{d}K} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}K}\left(-\frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L}\right) = \frac{-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}K}\right)\frac{\partial F}{\partial L} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K} + \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}K}\right)\frac{\partial F}{\partial K}}{\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)^2} \tag{A3.1}$$

sostituendo la (3.16) e riordinando i termini si ottiene:

$$\frac{\mathrm{dSMST}}{\mathrm{d}K} = \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K}\frac{\partial F}{\partial L}\frac{\partial F}{\partial K}}{\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right)^3}. \tag{A3.2}$$

Il denominatore della (A3.2) è positivo; i primi due addendi a numeratore sono positivi per l'ipotesi 2b di rendimenti marginali decrescenti dei fattori; il segno del terzo addendo è incerto; grazie però all'ipotesi 3 di rendimenti di scala costanti la funzione di produzione è omogenea di primo grado; per essa vale pertanto la relazione di Eulero (3.32)

$$F(K, L) \equiv \frac{\partial F}{\partial K}K + \frac{\partial F}{\partial L}L;$$

derivando parzialmente quest'ultima espressione rispetto a K si ottiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K}L = -\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}K;$$

pertanto $\frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K}L$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}K$ hanno segno opposto; essendo $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}K < 0$ per ipotesi, allora $\frac{\partial^2 F}{\partial L \partial K}L > 0$; quindi anche il terzo addendo del numeratore della (A3.2) è positivo, dunque

$$\frac{\mathrm{dSMST}}{\mathrm{d}K} > 0 \quad \mathrm{e} \quad \frac{\mathrm{d}|SMST|}{\mathrm{d}K} < 0.$$

Osservazione. L'ipotesi di rendimenti marginali decrescenti non è sufficiente a garantire la convessità degli isoquanti; nella dimostrazione abbiamo infatti fatto ricorso anche all'ipotesi di rendimenti di scala costanti.

3.B Andamento del SMST rispetto al rapporto K/L

(Per comprendere i passaggi di questa appendice è necessario aver già visto la riformulazione del modello in termini pro-capite del paragrafo 3.3.3 e, in particolare, la relazione fra le derivate parziali della funzione di produzione $F(K, L)$ e la derivata della funzione di produzione pro-capite, $f'(k)$. Poiché

$$\mathrm{SMST} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{\partial F}{\partial L}} = -\frac{f'(k)}{f(k) - kf'(k)};$$

pertanto

$$\frac{\mathrm{dSMST}}{\mathrm{d}k} = -\frac{f(k)f''(k)}{[f(k) - kf'(k)]^2},$$

e quindi

$$\frac{\mathrm{dSMST}}{\mathrm{d}k} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}|\mathrm{SMST}|}{\mathrm{d}k} < 0.$$

3.C Funzioni di domanda dei fattori

Per ottenere l'espressione delle funzioni di domanda di capitale e lavoro si osservi che la (3.22) può essere scritta nelle forme:

$$K = L \cdot h(\pi/w) \tag{A3.3a}$$

$$L = \frac{K}{h(\pi/w)}. \tag{A3.3b}$$

Sostituendo la (A3.3b) nella funzione di produzione (3.15) si ottiene:

$$Y = F\left(K, \frac{K}{h(\pi/w)}\right) = K \cdot F\left(1, \frac{1}{h(\pi/w)}\right)$$

(l'omogeneità di primo grado di F permette di fattorizzare K); risolvendo rispetto a K si ottiene la funzione di domanda di capitale:

$$K = Y \cdot \frac{1}{F\left(1, \frac{1}{h(\pi/w)}\right)} =: K^d\left(\frac{\pi}{w}, Y\right) \equiv Y \cdot k^d(\pi/w). \tag{A3.4}$$

Analogamente sostituendo la (A3.3a) nella funzione di produzione (3.15) si ottiene:

$$Y = F\left(L \cdot h(\pi/w), L\right) = L \cdot F\left(h(\pi/w), 1\right);$$

risolvendo rispetto a L si ottiene la funzione di domanda di lavoro:

$$L = \frac{Y}{F\left(h(\pi/w), 1\right)} =: L^d\left(\frac{\pi}{w}, Y\right) = Y \cdot l^d(\pi/w). \tag{A3.5}$$

Si può inoltre calcolare il segno delle seguenti derivate:

$$\begin{aligned}\frac{\partial K^d}{\partial(\pi/w)} &= -\frac{Y}{F(\cdot,\cdot)^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{h(\pi/w)}\right)}{\partial(\pi/w)} = \\ &= -\frac{1}{F(\cdot,\cdot)} \cdot \frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{-\frac{\partial h(\pi/w)}{\partial(\pi/w)}}{[h(\pi/w)]^2} < 0 \end{aligned} \tag{A3.6}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^d}{\partial\left(\frac{w}{\pi}\right)} &= \frac{-Y}{F(\cdot,\cdot)^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{\partial h(\pi/w)}{\partial(\pi/w)} \cdot \frac{\partial(\pi/w)}{\partial(w/\pi)} = \\ &= \frac{1}{F(\cdot,\cdot)} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{\partial h(\pi/w)}{\partial(\pi/w)} < 0. \end{aligned} \tag{A3.7}$$

3.D Equivalenza delle equazioni (3.30a)-(3.30b)

Si sostituisca l'espressione di k^d che si desume dalla (A3.4) nella (3.30a):

$$\bar{Y} \cdot \frac{1}{F\left(1, \frac{1}{h(\pi/w)}\right)} = \bar{K}$$

cioè

$$\bar{Y} = \bar{K} \cdot F\left(1, \frac{1}{h(\pi/w)}\right) = F\left(\bar{K}, \frac{\bar{K}}{h(\pi/w)}\right)$$

ricordando che in equilibrio vale la (3.22) si ha che $h(\pi/w) = \bar{K}/\bar{L}$; pertanto la (3.30a) è equivalente a:

$$\bar{Y} = F(\bar{K}, \bar{L}). \tag{A3.8}$$

D'altra parte si sostituisca l'espressione di l^d che si desume dalla (A3.5) nella (3.30b):

$$\bar{Y} \cdot \frac{1}{F(h(\pi/w), 1)} = \bar{L}$$

che equivale a
$$\bar{Y} = \bar{L}F(h(\pi/w), 1) = F(\bar{L}h(\pi/w), \bar{L}),$$
che, grazie ancora alla (3.22) può essere scritta anch'essa come la (A3.8). Dunque le (3.30a)-(3.30b) sono entrambe equivalenti alla (A3.8), dunque sono equivalenti tra loro.