

Parte II

Modelli multi-settoriali di produzione

Capitolo 4

Lo schema di Sraffa

4.1 Descrizione dell'economia

Consideriamo un sistema economico stazionario (un sistema che produce ogni “anno” le stesse quantità fisiche di merci). Ciascuna industria produce una singola merce mediante lavoro e merci, che costituiscono il capitale circolante dell'economia. Non c'è capitale fisso. La tecnica di produzione è rappresentata dalla matrice semipositiva $\mathbf{A} = [a_{mi}]$ e dal vettore semipositivo $\mathbf{a}_0^T = [a_{0i}]$, dove a_{mi} rappresenta la quantità di merce m impiegata per produrre una unità di merce i e a_{0i} indica la quantità di lavoro impiegata per produrre una unità di merce i . Non è necessario introdurre alcuna ipotesi sui rendimenti di scala, in quanto la maggior parte dei ragionamenti verrà svolta supponendo date le quantità prodotte. Introduremo l'ipotesi dei rendimenti di scala costanti limitatamente a quei contesti in cui si prenderanno in considerazione variazioni delle quantità prodotte.

4.2 Sistema dei prezzi

Il valore aggiunto viene distribuito a lavoratori e capitalisti. I lavoratori percepiscono i salari, calcolati sulla base di un salario unitario uniforme, w ; i capitalisti percepiscono i profitti, commisurati al valore del capitale investito in ciascuna industria sulla base di un saggio di profitto uniforme,

π . Pertanto il sistema dei prezzi è il seguente:

$$p_1 = (p_1 a_{11} + \dots + p_m a_{m1} + \dots + p_M a_{M1})(1 + \pi) + w a_{01} \quad (4.1-1)$$

\vdots

$$p_m = (p_1 a_{1m} + \dots + p_m a_{mm} + \dots + p_M a_{Mm})(1 + \pi) + w a_{0m} \quad (4.1-m)$$

\vdots

$$p_M = (p_1 a_{1M} + \dots + p_m a_{mM} + \dots + p_M a_{MM})(1 + \pi) + w a_{0M}, \quad (4.1-M)$$

o, in forma compatta,¹

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{A}(1 + \pi) + \mathbf{a}_0^T w. \quad (4.1)$$

Nel sistema (4.1) ci sono M equazioni in $M+2$ incognite: $p_1, \dots, p_m, \dots, p_M, w, \pi$, quindi si hanno 2 gradi di libertà. Uno di essi viene eliminato scegliendo il numerario, cioè ponendo alternativamente

$$\text{i) } p_m = 1, \quad \text{oppure} \quad \text{ii) } \mathbf{p}^T \mathbf{b} = 1, \quad \text{oppure} \quad \text{iii) } w = 1. \quad (4.2)$$

Il numerario del sistema è così rappresentato, alternativamente: i) dalla merce m ; ii) da un paniere di merci, \mathbf{b} ;² iii) da una unità di lavoro (es. un'ora di lavoro). Rimane così da fissare un'altra variabile: non avendo senso definire un secondo numerario la scelta ricade su una delle due variabili distributive. Questa "indeterminatezza" del sistema dei prezzi rispetto alla distribuzione del reddito³ era già stata colta dagli economisti classici, che avevano proposto di fissare il salario al livello delle sussistenze. Negli schemi moderni questa scelta non sembra più adeguata: per questa ragione si preferisce fissare esogenamente al sistema dei prezzi il saggio di profitto.

¹Nello scrivere le equazioni del sistema (4.1) si vede che si è supposto che i salari vengano pagati alla fine del periodo produttivo, anziché all'inizio come supposto nella sezione precedente. E' sempre possibile ritornare all'ipotesi precedente scrivendo il sistema dei prezzi nella forma $\mathbf{p}^T = (\mathbf{p}^T \mathbf{A} + \mathbf{a}_0^T w)(1 + \pi)$ senza alterare i risultati ottenuti. Questo caso non sarà quindi esplicitamente trattato, salvo in quei casi in cui i risultati subiscono modifiche rilevanti.

²Si noti che la normalizzazione che si ottiene ponendo $p_m = 1$ è ottenibile come caso particolare di quella che si ottiene ponendo $\mathbf{p}^T \mathbf{b} = 1$, nel caso in cui si fissa $\mathbf{b} = \mathbf{e}_m$. In ciò che segue considereremo pertanto soltanto le normalizzazioni $\mathbf{p}^T \mathbf{b} = 1$ e $w = 1$

³Ciò non significa una indeterminatezza della distribuzione del reddito; significa che nello schema di Sraffa la distribuzione del reddito è un fenomeno esogeno *rispetto al sistema dei prezzi e alle relazioni produttive*.

Sraffa segue questa seconda strada, senza però entrare nei dettagli delle determinanti del saggio di profitto. Egli infatti, al di là di un brevissimo cenno in cui dice che il saggio di profitto “è suscettibile di essere determinato da influenze estranee al sistema della produzione, e particolarmente dal livello dei tassi dell’interesse monetario” (Sraffa (1960, p. 43)), si limita a risolvere il sistema dei prezzi parametricamente in corrispondenza dei diversi valori che π può assumere. Prima però di seguire Sraffa in questa analisi mostriamo come dallo schema di Sraffa emerge una soluzione ai problemi che aveva incontrato Ricardo nel generalizzare la sua teoria della distribuzione al caso di un’economia con più merci evidenziati alla fine del capitolo precedente.

4.3 Una relazione salari-profitti indipendente dai prezzi

Sraffa, attraverso la costruzione di un sistema economico astratto, chiamato “sistema tipo”, ha mostrato come sia possibile determinare, all’interno di un’economia multisettoriale, il saggio di profitto una volta dato il salario, *senza la necessità di conoscere i prezzi* o, più in generale, come sia possibile conoscere la relazione esistente tra queste due variabili in maniera *indipendente* dai prezzi.

4.A Il problema di Ricardo all’interno dello schema di Sraffa

Supponiamo di esprimere i prezzi e il salario unitario in termini del generico numerario \mathbf{b} : consideriamo cioè l’equazione del sistema dei prezzi (4.1) normalizzata dall’equazione (4.2ii). Sostituendo la (4.1) nella (4.2ii) ed esplicitando rispetto a π si ottiene:

$$\pi = \frac{1 - \mathbf{p}^T(\pi)\mathbf{A}\mathbf{b} - w\mathbf{a}_0^T\mathbf{b}}{\mathbf{p}^T(\pi)\mathbf{A}\mathbf{b}}. \quad (4.3)$$

La (4.3) evidenzia appieno il problema analitico incontrato da Ricardo nella determinazione del saggio di profitto in un sistema economico nel quale si produce più di una merce: il saggio di profitto, variabile da determinare, appare sia al primo membro che al secondo membro dell’equazione che lo determina. La prima difficoltà incontrata da Ricardo era costituita dal fatto che egli, non avendo formulato il problema in termini analitici non era in grado di cogliere che la soluzione di tale problema consisteva nella risoluzione di un sistema di equazioni simultanee. La seconda difficoltà consisteva nel fatto che la presenza dei prezzi – che dipendono dal saggio di profitto – nella relazione che determina il saggio di profitto offuscava la possibilità di vedere che salari e profitti sono legati da una relazione inversa.

4.B Il sistema tipo

Per costruire il sistema tipo passiamo a considerare le relazioni tra le quantità prodotte nel sistema economico in esame. Per rappresentarle possiamo utilizzare il sistema aperto di Leontief:⁴

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{y} \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{a}_0^T \mathbf{q} = 1, \quad (4.4b)$$

dove \mathbf{q} indica il vettore a m componenti delle quantità totali prodotte delle varie merci (il prodotto lordo del sistema) e \mathbf{y} indica il vettore a m componenti delle quantità delle stesse merci che possono essere dedicate alla domanda finale (il prodotto netto). La quantità totale di lavoro dell'economia è stata normalizzata a 1.

\mathbf{y} può essere scelto esogenamente rispetto al sistema dei prezzi. Facciamo ora un'ipotesi: fissiamo \mathbf{y} , prodotto netto dell'economia, in modo tale che esso risulti *proporzionale* al vettore dei mezzi di produzione utilizzati per produrlo, $\mathbf{A}\mathbf{q}$:

$$\mathbf{y} = R\mathbf{A}\mathbf{q}, \quad (4.5)$$

dove lo scalare R può essere interpretato come un saggio fisico di sovrappiù, uniforme tra i vari settori produttivi. L'ipotesi di uniformità dei saggi fisici di sovrappiù non è ovviamente plausibile dal punto di vista economico: non c'è alcuna ragione per supporre che le proporzioni con cui le merci vengono assorbite dalla domanda finale riflettano le proporzioni con cui le stesse merci sono usate come mezzi di produzione. Introduciamo questa supposizione al solo fine, come vedremo, di predisporre un opportuno numerario avente determinate caratteristiche.

Il sistema tipo è definito come un sistema economico nel quale “le diverse merci [sono] rappresentate nel complesso dei suoi mezzi di produzione *nelle stesse proporzioni* in cui si trovano fra i suoi prodotti!” Sraffa (1960, p. 24; corsivo nell'originale).

Sostituendo l'equazione (4.5) nella (4.4a) otteniamo le equazioni che definiscono le relazioni fra le quantità totali prodotte in questo sistema “ideale” che Sraffa definisce *sistema tipo*:

$$\mathbf{q} = (1 + R)\mathbf{A}\mathbf{q} \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{a}_0^T \mathbf{q} = 1. \quad (4.6b)$$

⁴Dobbiamo così re-introdurre nell'analisi l'ipotesi dei rendimenti di scala costanti, che finora non era stata utilizzata in quanto non si erano considerate variazioni delle quantità prodotte. Vedremo però che potremo rimuovere nuovamente tale ipotesi, anche in relazione ai risultati che emergeranno grazie al suo utilizzo.

Il sistema (4.6a) è il sistema degli autovettori destri di \mathbf{A} . Per esaminare le sue proprietà matematiche lo possiamo scrivere nella forma:

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{1+R} \mathbf{I} \right) \mathbf{q} = \mathbf{o};$$

ponendo

$$\eta = \frac{1}{1+R} \quad (4.7)$$

il sistema può essere riscritto nella forma:

$$(\mathbf{A} - \eta \mathbf{I}) \mathbf{q} = \mathbf{o}. \quad (4.6a')$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema lineare omogeneo (4.6a') ammetta soluzioni non-banali è che:

$$\det(\mathbf{A} - \eta \mathbf{I}) = 0; \quad (4.8)$$

La (4.8) è l'equazione caratteristica della matrice \mathbf{A} ; essa è in grado di determinare m autovalori; fra essi fissiamo l'attenzione su quello avente modulo massimo, η^* , in quanto i teoremi di Perron-Frobenius assicurano che l'autovettore destro ad esso corrispondente è semi-positivo (positivo se la matrice \mathbf{A} è indecomponibile). Fissando $\eta = \eta^*$ otteniamo, grazie alla (4.7), il valore del saggio fisico uniforme di sovrappiù:

$$R^* = \frac{1}{\eta^*} - 1. \quad (4.9)$$

Affinché R^* sia positivo è necessario e sufficiente che:

$$\eta^* < 1 : \quad (4.10)$$

questa condizione può essere considerata una "condizione di vitalità" della tecnica: essa infatti garantisce la positività del saggio fisico uniforme di sovrappiù. Sostituendo ora il valore di R^* determinato dalla (4.9) nelle (4.6) e risolvendo rispetto a \mathbf{q} otteniamo il vettore delle quantità da produrre nel sistema tipo. Indichiamo con \mathbf{q}^* l'autovettore destro della matrice \mathbf{A} corrispondente all'autovalore di modulo massimo $\eta^* = 1/(1+R^*)$, normalizzato dalla (4.6b). Il vettore \mathbf{q}^* viene chiamato *prodotto lordo tipo*. Si vede facilmente che il *prodotto netto tipo*, $\mathbf{y}^* = R^* \mathbf{A} \mathbf{q}^*$ è proporzionale a \mathbf{q}^* ; infatti per la (4.6a):

$$\mathbf{y}^* := R^* \mathbf{A} \mathbf{q}^* = \frac{R^*}{1+R^*} \mathbf{q}^*; \quad (4.11)$$

poiché \mathbf{q}^* e \mathbf{y}^* sono fra loro proporzionali, anche \mathbf{y}^* sarà un autovettore destro di \mathbf{A} corrispondente all'autovalore di modulo massimo $\frac{1}{1+R^*}$. Quindi

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \frac{1}{1+R^*}\mathbf{y}^*; \quad (4.12a)$$

inoltre sostituendo la (4.11) nella (4.6b) si ha:

$$\mathbf{a}_0^T \mathbf{y}^* = \frac{R^*}{1+R^*}. \quad (4.12b)$$

Il prodotto netto tipo può essere considerato una merce composita; è ciò che Sraffa chiama *merce tipo* (Per ulteriori dettagli vedi Pasinetti (1975, cap. 5, § 9).)

Esempio 4.5 (Esempio di sistema nelle proporzioni “tipo”) *Si consideri un sistema economico con due industrie in cui la tecnica del sistema è rappresentata dalla seguente matrice e dal seguente vettore dei coefficienti di lavoro diretto:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_0^T = [1/40 \quad 1/20]$$

L'autovalore di modulo massimo della matrice \mathbf{A} è $\eta^ = 0,8$, quindi il saggio fisico di sovrappiù è $R^* = 0,25\%$. In tal cas si ha:*

- *prodotto lordo tipo: $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$;*
- *prodotto netto tipo è $\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$;*
- *mezzi di produzione utilizzati è $\mathbf{A}\mathbf{q}^* = \frac{1}{1+0,25}\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix}$.*

□

4.C Relazione salari-profitti nel sistema tipo e nel sistema effettivo

Tale sistema astratto, ha la particolarità che la *stessa* merce (composita), presa in quantità diverse compare come prodotto lordo (\mathbf{q}^*), come prodotto netto ($\mathbf{y}^* = \frac{R^*}{1+R^*}\mathbf{q}^*$), come mezzo di produzione ($\mathbf{A}\mathbf{q}^* = \frac{1}{1+R^*}\mathbf{q}^*$) e come salario. Ricorda lo schema ricardiano a una merce (grano), anche se in

questo caso la merce è composita. Le relazioni distributive (la relazione tra salario unitario e saggio di profitto), di conseguenza, dovrebbero apparire in maniera molto semplice, in quanto dovrebbero poter essere espresse senza far riferimento allo schema dei prezzi. Infatti se anche il salario unitario consistesse di merce tipo si avrebbe che il prodotto netto, \mathbf{y}^* , sarebbe così suddiviso tra capitalisti e lavoratori:

$$\begin{aligned}\text{salario unitario} &= \omega \mathbf{y}^* \\ \text{profitto} &= (1 - \omega) \mathbf{y}^*,\end{aligned}\quad (4.13)$$

dove ω è la frazione di prodotto netto che va ai salari, $0 \leq \omega \leq 1$.

Inoltre si ha:

$$\text{capitale impiegato (nel sistema tipo)} = \mathbf{Aq}^* = \frac{1}{R^*} \mathbf{y}^*; \quad (4.14)$$

pertanto il saggio di profitto può essere calcolato immediatamente dalle (4.13) e (4.14) senza dover passare attraverso il sistema dei prezzi. Infatti qualunque sistema di prezzi fosse usato per *valutare* il profitto e il capitale—consistenti entrambi di merce tipo—si semplificherebbe, in quanto i vettori $(1 - \omega) \mathbf{y}^*$ e $\frac{1}{R^*} \mathbf{y}^*$ sono proporzionali tra loro: si avrebbe

$$\pi = \frac{(1 - \omega) \mathbf{p}^T \mathbf{y}}{\mathbf{p}^T \mathbf{Aq}^*} = \frac{(1 - \omega) \mathbf{p}^T \mathbf{y}}{\frac{1}{R^*} \mathbf{p}^T \mathbf{y}} = R^* (1 - \omega).$$

Questa è la relazione ottenuta tra salario unitario e saggio di profitto nel sistema tipo.

Esempio 4.6

Si consideri il sistema tipo nel sistema tipo presentato al precedente Esempio 4.B. Se in tale sistema il salario unitario consiste di merce tipo la relazione fra il salario unitario e il saggio di profitto in tale sistema può così essere calcolata:

$$\begin{aligned}\text{salario unitario} &= \omega \mathbf{y}^* = \omega \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \text{profitto} &= (1 - \omega) \mathbf{y}^* = (1 - \omega) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\text{capitale impiegato} = \mathbf{Aq}^* = \frac{1}{R^*} \mathbf{y}^* = \frac{1}{0,25} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix};$$

di conseguenza il saggio di profitto è dato da:

$$\pi = 0,25(1 - \omega).$$

□

Questo risultato—che avrebbe risolto il problema di Ricardo di determinare il saggio di profitto, una volta noto il salario, in maniera indipendente dai prezzi—non avrebbe nessuna rilevanza se non fosse generalizzabile al sistema effettivo. Di fatto questa generalizzazione è possibile, alla sola condizione di esprimere tutti i prezzi e il salario unitario in termini di merce tipo. Ponendo infatti

$$\mathbf{p}^T \mathbf{y}^* = 1 \quad (4.15)$$

si ottiene:

$$\pi = \frac{1 - \mathbf{p}^T(\pi) \mathbf{A} \mathbf{y}^* - w \mathbf{a}_0^T \mathbf{y}^*}{\mathbf{p}^T(\pi) \mathbf{A} \mathbf{y}^*} = \quad (4.16)$$

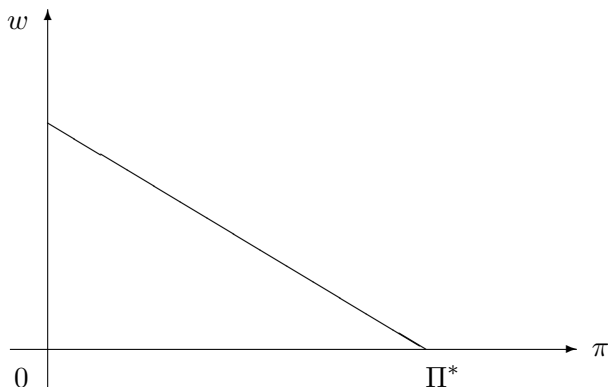
$$= \frac{1 - \mathbf{p}^T(\pi) \mathbf{y}^* \frac{1}{1+R^*} - w \frac{R^*}{1+R^*}}{\mathbf{p}^T(\pi) \mathbf{y}^* \frac{1}{1+R^*}} = \quad (\text{grazie alle (4.12)})$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{1+R^*} - w \frac{R^*}{1+R^*}}{\frac{1}{1+R^*}} \quad (\text{grazie alla (4.15)}),$$

$$= R^*(1 - w). \quad (4.17)$$

Come si vede il vettore dei prezzi, e le sue variazioni conseguenti a variazione della distribuzione del reddito, sono spariti dall'espressione della relazione tra le due variabili distributive, w e π . In questo modo si è riusciti a *separare* l'analisi della distribuzione da quella del valore; il saggio di profitto viene così a essere una variabile determinata in maniera indipendente dal sistema dei prezzi. Si tratta di un risultato notevole per l'analisi ricardiana; e l'unica condizione che è stata necessaria per ottenerlo è stata quella di esprimere il salario unitario e i prezzi dei beni in termini di merce tipo; un'ipotesi che si può sempre fare.

È possibile capire la natura di questo risultato dal punto di vista economico. Come si vede dalla (4.3) il saggio di profitto, per ogni dato livello del salario unitario, viene calcolato rapportando il profitto conseguito sulla produzione di una unità della merce usata come numerario e il valore del capitale necessario a produrre tale unità. Ma dato il salario unitario – che è uniforme fra tutte le industrie – anche il saggio di profitto così calcolato

Figura 4.1: Andamento di w al variare di π nel sistema tipo

è lo stesso per tutte le industrie. Quindi la relazione fra w e π relativa all'industria che produce il numerario è informativa del legame tra queste due variabili a livello dell'intero sistema. Analogo discorso può essere fatto per l'equazione (4.16), con la differenza che, in questo caso la merce numerario è la merce tipo, \mathbf{y}^* , una merce composta particolare che per definizione, gode della proprietà che le varie merci che appaiono in essa sono rappresentate *nelle stesse proporzioni* nell'insieme dei beni capitali necessari a produrla, $\mathbf{A}\mathbf{y}^*$, (dall'equazione (4.12a) si ha che $\mathbf{y}^* = (1 + R^*)\mathbf{A}\mathbf{y}^*$); in altre parole la merce tipo e l'insieme dei beni capitali necessari a produrla sono la *stessa* merce (composta). Usando \mathbf{y}^* come numerario anche w viene espresso in termini di merce tipo. Di conseguenza all'interno di questa industria il calcolo del saggio di profitto viene fatto confrontando quantità fisiche della stessa merce. È pertanto possibile arrivare a conoscere il saggio di profitto a prescindere dal sistema dei prezzi. Infatti, considerando una produzione di merce tipo nelle quantità \mathbf{y}^* che vale, ovviamente, 1 unità di merce tipo, il capitale necessario a produrre \mathbf{y}^* , cioè $\mathbf{A}\mathbf{y}^*$, è una frazione della merce tipo stessa, $\frac{1}{1+R^*}\mathbf{y}^*$, che espressa in termini di di merce tipo vale $\frac{1}{1+R^*}$; il salario, espresso in termini di merce tipo, è pari a $w\mathbf{a}_0^T\mathbf{y}^* = w\frac{R^*}{1+R^*}$; rapportando il tutto al capitale necessario per produrre \mathbf{y}^* , che è costituito da $\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \frac{1}{1+R^*}\mathbf{y}^*$ si vede che il calcolo del saggio di profitto prescinde dalla conoscenza del sistema dei prezzi. Ovviamente non c'è alcuna necessità che il prodotto netto del sistema effettivo coincida col prodotto netto del sistema tipo. Il sistema tipo serve soltanto a individuare le proporzioni con cui co-

struire un paniere “ideale” di merci da usare come numerario del sistema dei prezzi.⁵ Questo risultato dà una base rigorosa all’idea ricardiana di trattare il problema della distribuzione del reddito indipendentemente dal sistema dei prezzi.

4.4 La relazione fra salario unitario e saggio di profitto

Lo schema analitico proposto da Sraffa permette però di andare oltre, e di mostrare che, qualunque sia il numerario scelto, la relazione fra il salario unitario e il saggio di profitto è comunque decrescente. Il dover passare per il tramite dei prezzi per conoscere il saggio di profitto non offusca comunque l’idea che l’aumento di una variabile distributiva richieda *necessariamente* la riduzione dell’altra. Per vedere ciò rovesciamo, come fa Sraffa, la scelta circa la variabile distributiva da determinare esogenamente al sistema dei prezzi: consideriamo dato il saggio di profitto, fissiamo come numerario la generica merce composta \mathbf{b} e risolviamo il sistema (4.1)-(4.2-ii) (che riportiamo di seguito per comodità) rispetto ai prezzi e al salario unitario:

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{A}(1 + \pi) + \mathbf{a}_0^T w \quad (4.1)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = 1. \quad (4.2\text{-ii})$$

Isolando \mathbf{p}^T nella (4.1) si ottiene

$$\mathbf{p}^T = w \mathbf{a}_0^T [\mathbf{I} - (1 + \pi) \mathbf{A}]^{-1}. \quad (4.18)$$

Sostituendo la (4.18) nella (4.2-ii) e risolvendo rispetto a w si ottiene:

$$w = \frac{1}{\mathbf{a}_0^T [\mathbf{I} - (1 + \pi) \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b}} =: w(\pi). \quad (4.19)$$

Nell’espressione a secondo membro compare solo il saggio di profitto, che si è supposto dato. La (4.19) costituisce pertanto la soluzione del sistema (4.1)-(4.2-ii) rispetto al salario unitario per ogni dato livello del saggio di profitto.

Abbiamo ora gli strumenti per vedere se questa soluzione ha significato economico (se è non-negativa) e per studiare analiticamente l’andamento della relazione fra w e π .

⁵Ciò spiega perché l’ipotesi di rendimenti di scala costanti, sulla base della quale è stato costruito il sistema tipo non devono valere necessariamente anche per il sistema effettivo: il problema non si pone perché non c’è necessità alcuna di *produrre* effettivamente la merce tipo.

Per affrontare questo problema osserviamo che in $w(\pi)$ appare la matrice inversa

$$[\mathbf{I} - (1 + \pi)\mathbf{A}]^{-1}, \quad (4.20)$$

la quale, poiché $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, è un caso particolare della matrice $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1}$ presa in esame nei teoremi di Perron-Frobenius, dove $t = 1 + \pi$. Uno di questi teoremi mostra che questa matrice è semipositiva (positiva se \mathbf{A} è indecomponibile) per $0 \leq t < 1/\lambda^*$. Un altro teorema dimostra che gli elementi della matrice inversa (4.20) sono funzioni continue e non-decrescenti (crescenti se \mathbf{A} è indecomponibile) di t per $0 \leq t < 1/\lambda^*$.

Indichiamo con i simboli $\alpha_{mi}(\pi)$ gli elementi della matrice (4.20), $m, i = 1, \dots, M = I$, e sia

$$\Pi^* := 1/\lambda^* - 1; \quad (4.21)$$

poiché la matrice (4.20) è una matrice inversa ciascun elemento $\alpha_{mi}(\pi)$ è un rapporto fra un polinomio in π di grado $M - 1$ e un polinomio in π di grado M . Inoltre, per quanto detto prima, nell'intervallo $-1 \leq \pi < \Pi^*$, ma a noi interesserà considerare solo l'intervallo $0 \leq \pi < \Pi^*$, ciascun elemento $\alpha_{mi}(\pi)$ sarà funzione continua, non-negativa e non-decrescente (positiva e strettamente crescente se \mathbf{A} è indecomponibile) di π . Poiché $w(\pi) = 1 / \left(\sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I a_{0m} b_i \alpha_{mi}(\pi) \right)$, dove $a_{0m} \geq 0$ per ogni m e $a_{0m} > 0$ per almeno un $m' \in (1, \dots, M)$ e $b_i \geq 0$ per ogni i e $b_i > 0$ per almeno un $i' \in (1, \dots, I)$, allora seguono le due seguenti proprietà:

PROPRIETÀ 1 *Il salario unitario è positivo per $0 \leq \pi < \Pi^*$.*

PROPRIETÀ 2 *Il salario unitario è funzione continua e non-crescente di π per $0 \leq \pi < \Pi^*$ (decrescente se \mathbf{A} è indecomponibile).*

Di più non si può dire a proposito di questa relazione, in particolare a proposito della sua convessità o concavità: si tratta infatti di un rapporto fra un polinomio di grado $M - 1$ e un polinomio di grado M in π .

Il fatto che comunque si sia riusciti a provare che tale relazione sia *decrescente* è sufficiente per conseguire gli obiettivi di Ricardo: di determinare una variabile distributiva una volta nota l'altra e di confutare l'“illusione” che le variabili distributive potessero essere determinate in maniera indipendente l'una dall'altra, cosicché l'aumento dell'una non richiedesse *necessariamente* la diminuzione dell'altra.

Π^* costituisce il livello massimo che può raggiungere il saggio di profitto senza che il salario diventi negativo. Lo chiameremo pertanto *saggio massimo di profitto*. Dalla (4.19) e dalla definizione di Π^* (equazione (4.21)) si

vede che per $\pi = \Pi^*$ la funzione $w(\pi)$ non è definita, in quanto la matrice $[\mathbf{I} - (1 + \pi)\mathbf{A}]$ non è più invertibile, dato che $(1 + \Pi^*)^{-1} = \lambda^*$ è autovalore di \mathbf{A} . Possiamo però calcolare il seguente limite ottenendo

$$\lim_{\pi \rightarrow \Pi} w(\pi) = 0,$$

in quanto per $\pi = \Pi$ il determinante di $[\mathbf{I} - (1 + \pi)\mathbf{A}]$ si annulla.

Dalla definizione (equazione (4.21)) si vede immediatamente che:

$$\Pi^* \equiv R^*.$$

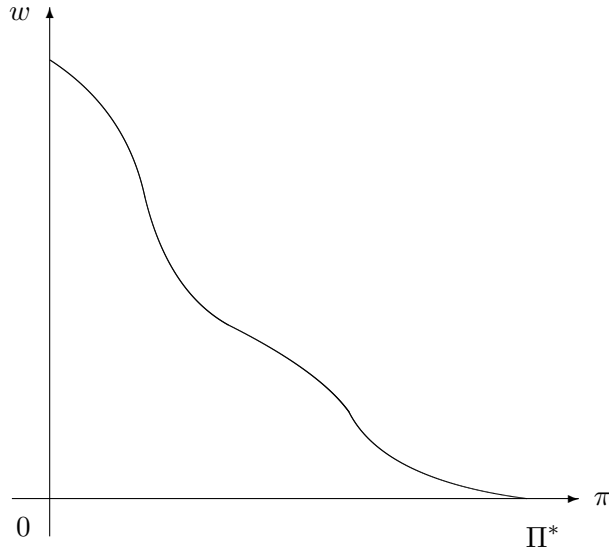
Questo è un risultato rilevante per lo schema in esame soprattutto se visto in relazione all'interesse di Ricardo a enfatizzare l'aspetto *fisico* della distribuzione del reddito.

Ovviamente anche in questo contesto ci interessano i casi in cui $\Pi^* \geq 0$; dalla (4.21) ciò equivale a

$$\lambda^* \leq 1. \quad (4.22)$$

Questa condizione coincide con la condizione di vitalità prima introdotta (equazione (4.10)) e ne offre un'altra interpretazione economica: un sistema economico "vitale" è in grado di dare origine a un saggio massimo di profitto positivo (oltre che in grado di produrre un saggio uniforme di sovrappiù positivo).

Possiamo osservare ora quanto segue: si confronti la forma complicata, benché decrescente, assunta dalla relazione fra il salario unitario e il saggio di profitto nel caso in cui i) viene usato un numerario generico, \mathbf{b} , e la semplicità della relazione $\pi = R^*(1 - w)$ ottenuta quando tale relazione risulta essere *indipendente* dai prezzi, il che avviene ii) nel caso (estremamente improbabile) che un sistema economico si trovi esattamente nelle proporzioni tipo o iii) nel caso, sempre possibile, di esprimere tutti i prezzi e il salario unitario in termini di merce tipo. L'indipendenza dai prezzi ottenuti nei casi ii) e iii) fa emergere un legame *lineare* tra queste due variabili, che riflette il fatto che salari e profitti si combinano in maniera *additiva* nelle equazioni dei prezzi (4.1); in altri termini fa emergere il legame tra queste due variabili "allo stato puro", al netto delle complicazioni derivanti dalla variazioni del sistema dei prezzi. È in *questo* senso che ha significato sottolineare la linearità della relazione fra π e w ; non è la linearità in quanto tale ad avere significato economico. In proposito si osservi che basta solo supporre che i salari siano pagati anziché alla fine del periodo di produzione, come implicato dall'equazione (4.1), che la relazione fra π e w ottenuta nei casi ii) e

Figura 4.2: Andamento di $w(\pi)$

iii) non è più lineare, anche se continua a essere ottenuta indipendentemente dal sistema dei prezzi. Nel caso di salari pagati all'inizio del periodo di produzione il sistema dei prezzi diventa:

$$\mathbf{p}^T = (1 + \pi)(\mathbf{p}^T \mathbf{A} + w\mathbf{a}_0^T). \quad (4.23)$$

Esprimendo i prezzi e il salario unitario in termini di merce tipo \mathbf{y}^* seguendo la stessa logica usata per ottenere la relazione (4.17) si ottiene la seguente relazione fra π e w :

$$\pi = \frac{\Pi^*(1 - w)}{1 + \Pi^*w}.$$

In questo caso la relazione non è lineare; è un'iperbole, ma viene ottenuta ancora in maniera indipendente dai prezzi, e tale indipendenza permette di evidenziare il legame *moltiplicativo* esistente tra le due variabili distributive.

4.5 Struttura dei prezzi al variare del saggio di profitto

Siamo ora in grado di risolvere il sistema (4.1)-(4.2-ii) rispetto ai prezzi. Sostituiamo l'espressione trovata per $w(\pi)$ nella (4.18) e otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T &= w(\pi) \mathbf{a}_0^T [\mathbf{I} - (1 + \pi) \mathbf{A}]^{-1} = \\ &= \frac{1}{\mathbf{a}_0^T [\mathbf{I} - (1 + \pi) \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b}} \mathbf{a}_0^T [\mathbf{I} - (1 + \pi) \mathbf{A}]^{-1} =: \mathbf{p}^T(\pi). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Basandosi su quanto detto nella sezione precedente a proposito della matrice inversa (4.20) si vede che la soluzione (4.24) rispetto ai prezzi del sistema di Sraffa è economicamente significativa in quanto vale la seguente

PROPRIETÀ 3 *Il vettore dei prezzi $\mathbf{p}^T(\pi)$, soluzione del sistema (4.1)-(4.2-ii) è semi-positivo per $0 \leq \pi < \Pi^*$ (positivo se \mathbf{A} è indecomponibile).*

Oltre a ciò non si riesce a dire nulla di più circa l'andamento di ciascun prezzo al variare della distribuzione del reddito. Osservando la soluzione (4.24) si può vedere che ciascun prezzo è costituito dal rapporto di due polinomi in π di grado $M - 1$. Ciascun prezzo sarà pertanto una funzione continua ma non necessariamente monotona di π .

Prima di addentrarci nello studio delle "cause" che stanno dietro la variazione dei prezzi delle merci al variare della distribuzione prendiamo in esame due particolari configurazioni di prezzi, che corrispondono alle due ipotesi estreme opposte circa la fissazione della distribuzione del reddito: il caso in cui il saggio di profitto è nullo e il caso in cui il salario unitario è nullo.

Sistema dei prezzi nel caso $\pi = 0$.

In questo caso il sistema (4.1)-(4.2) diventa

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{A} + \mathbf{a}_0^T w \quad (4.25a)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = 1 \quad (4.25b)$$

e la soluzione si ottiene ponendo $\pi = 0$ nella (4.24):

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T(0) = w(0) \mathbf{a}_0^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = w(0) \mathbf{v}^T \quad (4.26)$$

dove $\mathbf{v}^T := \mathbf{a}_0^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

È possibile indagare esplicitamente il tipo di teoria del valore espresso nei prezzi (4.26). La matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ è la cosiddetta "matrice inversa di

Leontief". Indichiamo con α_{mi} il suo generico elemento. Ciascuno di essi indica le quantità totali delle varie merci richieste direttamente o indirettamente nell'intero sistema per poter disporre di una unità di merce i come merce finale. Il vettore \mathbf{v} è dato dal prodotto:

$$\mathbf{v}^T = [a_{01}, \dots, a_{0m}, \dots, a_{0M}] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1i} & \cdots & \alpha_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mi} & \cdots & \alpha_{mI} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{M1} & \cdots & \alpha_{Mi} & \cdots & \alpha_{MI} \end{bmatrix},$$

$$= \left[\sum_{m=1}^M a_{0m} \alpha_{m1}, \dots, \sum_{m=1}^M a_{0m} \alpha_{mi}, \dots, \sum_{m=1}^M a_{0m} \alpha_{mI} \right].$$

Ciascuno dei suoi elementi indica la quantità totale di lavoro richiesta direttamente o indirettamente nell'intero sistema per poter disporre di una unità di merce i come merce finale. Detto in altre parole ciascun elemento v_i del vettore \mathbf{v} indica la quantità di lavoro verticalmente integrato o incorporato in ciascuna merce i . Possiamo quindi concludere che i prezzi (4.26) esprimono la *teoria del valore lavoro*.

Un modo forse più intuitivo per vedere ciò è osservare che, mediante l'algoritmo di inversione per sviluppo in serie, i prezzi (4.26) possono anche essere espressi nella forma:

$$\mathbf{p}^T(0) = w(0) \mathbf{a}_0^T (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = w(0) (\mathbf{a}_0^T + \mathbf{a}_0^T \mathbf{A} + \mathbf{a}_0^T \mathbf{A}^2 + \mathbf{a}_0^T \mathbf{A}^3 + \dots). \quad (4.27)$$

Gli addendi della serie tra parentesi sono le quantità di lavoro necessarie a produrre le varie merci (\mathbf{a}_0), le quantità di lavoro necessarie a produrre i mezzi di produzione impiegati per produrre le varie merci ($\mathbf{a}_0^T \mathbf{A}$), le quantità di lavoro necessarie a produrre i mezzi di produzione che a loro volta sono stati impiegati per produrre i mezzi di produzione impiegati per produrre le varie merci ($\mathbf{a}_0^T \mathbf{A}^2$), etc. La loro somma costituisce il cosiddetto lavoro incorporato nelle varie merci.

Sistema dei prezzi corrispondente al caso $w = 0$.

Prima di procedere oltre vale la pena di osservare che per rendere economicamente interessante questo caso dobbiamo interpretare il salario w come un salario di sovrappiù rispetto a un salario "di sussistenza", che, potremmo immaginare costituito da un insieme di merci di prima necessità, già incluse

nella matrice \mathbf{A} .⁶ Intuitivamente in questo caso il saggio di profitto dovrebbe raggiungere il suo livello massimo, Π^* . In effetti il sistema (4.1)-(4.2) diventa

$$\mathbf{p}^T = (1 + \Pi)\mathbf{p}^T \mathbf{A} \quad (4.28a)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = 1. \quad (4.28b)$$

Il sistema (4.28) risulta duale al sistema (4.6). Concentriamo l'attenzione sulle prime M equazioni (4.28a) del sistema; ponendo

$$\lambda := \frac{1}{1 + \Pi} \quad (4.29)$$

esse possono essere scritte nella forma

$$\mathbf{p}^T (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{o}^T;$$

condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta soluzioni è che

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0; \quad (4.30)$$

La (4.30) è l'equazione caratteristica della matrice \mathbf{A} ; anch'essa, come la (4.8), è in grado di determinare m autovalori; fra essi fissiamo l'attenzione su quello avente modulo massimo, λ^* , in quanto i teoremi di Perron-Frobenius assicurano che l'autovettore sinistro ad esso corrispondente è semi-positivo (positivo se la matrice \mathbf{A} è indecomponibile). Avendo scelto $\lambda = \lambda^*$ verifichiamo, grazie alla (4.29), che il valore che raggiunge il saggio di profitto quando $w = 0$ è effettivamente uguale al valore di quello che abbiamo chiamato saggio massimo di profitto:

$$\Pi^* = \frac{1}{\lambda^*} - 1. \quad (4.31)$$

Indichiamo con \mathbf{p}^{*T} l'autovettore sinistro della matrice \mathbf{A} corrispondente all'autovalore di modulo massimo $\lambda^* = 1/(1 + \Pi^*)$, normalizzato dalla (4.28b).

Per cogliere il significato economico dei prezzi \mathbf{p}^* si osservi che la (4.28a) può essere scritta nella forma:

$$p_m^* = (1 + \Pi^*)\mathbf{p}^{*T} \mathbf{a}_m, \quad m = 1, \dots, M;$$

⁶ Analiticamente questo può essere ottenuto pensando che la matrice \mathbf{A} sia costituita dalla somma di due matrici, \mathbf{A}^+ e $\mathbf{d}\mathbf{a}_0^T$, dove la prima è una matrice intersettoriale contenente i requisiti strettamente tecnici e la seconda è una matrice contenente i requisiti di merci richiesti in ciascun settore come beni di sussistenza (rappresentati dal vettore \mathbf{d}) da dare alle unità di lavoro impiegate in ciascun settore, \mathbf{a}_0 .

pertanto il prezzo relativo fra due merci qualsiasi, m ed μ sarà dato dal rapporto fra i corrispondenti valori dei mezzi di produzione usati per produrli,

$$\frac{p_m^*}{p_\mu^*} = \frac{\mathbf{p}^{*T} \mathbf{a}_m}{\mathbf{p}^{*T} \mathbf{a}_\mu}, \quad i, m, \mu = 1, \dots, M.$$

Tali prezzi esprimono la *teoria del valore capitale*.

Possiamo osservare a questo punto come la formulazione analitica finora presentata spiega le origini di alcune delle difficoltà incontrate dai classici nel sostenere la validità della teoria del valore lavoro. I due casi estremi che abbiamo finora esaminato sono:

$\pi = 0$	\vdots	$\pi = \Pi$
	\vdots	(cioè salario di sussistenza)
	\vdots	
$\mathbf{p} = w\mathbf{v}$	\vdots	$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^{*T}$,
	\vdots	dove $\mathbf{p}^{*T} = (1 + \Pi)\mathbf{p}^T \mathbf{A}$
	\vdots	
$\frac{p_m}{p_\mu} = \frac{v_m}{v_\mu}$	\neq	$\frac{\mathbf{p}^{*T} \mathbf{a}_m}{\mathbf{p}^{*T} \mathbf{a}_\mu} = \frac{p_m^*}{p_\mu^*}$
Teoria del valore lavoro	\vdots	Teoria del valore capitale

Gli economisti classici partivano dall'ipotesi distributiva che i salari fossero fissati al livello di sussistenza, cioè che $w = 0$; da quanto detto prima ciò porta a ottenere un sistema di prezzi che esprime una teoria del valore capitale. Per ottenere, come avrebbero voluto, una teoria del valore lavoro sarebbero dovuti partire dall'ipotesi distributiva opposta, $\pi = 0$. L'unica possibilità di ottenere una teoria del valore lavoro partendo dall'ipotesi di salari fissati al livello di sussistenza è che $\frac{v_m}{v_i} = \frac{\mathbf{p}^{*T} \mathbf{a}_m}{\mathbf{p}^{*T} \mathbf{a}_i}$, cioè che:

$$\frac{\mathbf{p}^{*T} \mathbf{a}_m}{v_m} = \frac{\mathbf{p}^{*T} \mathbf{a}_\mu}{v_\mu}, \quad m, \mu = 1, \dots, M.$$

Il rapporto fra il valore del capitale e la quantità di lavoro impiegati in un settore deve cioè essere uguale a quello degli altri settori. Si tratta di un'ipotesi alquanto restrittiva. A essa erano dovuti ricorrere sia Ricardo che Marx (il primo l'aveva chiamata uguaglianza dell'intensità di capitale, il secondo uniformità della composizione organica del capitale).

Sistema dei prezzi in corrispondenza di $\pi \in (0, \Pi^)$: riduzione dei prezzi a quantità di lavoro datate*

Ci si può domandare se sia possibile enucleare il tipo di teoria del valore implicita nei prezzi (4.24) per il caso in cui $0 < \pi < \Pi$.

A tale scopo ci possiamo servire della proprietà di inversione mediante sviluppo in serie di una matrice possiamo osservare che la matrice $[\mathbf{I} - (1 + \pi)\mathbf{A}]^{-1}$ è invertibile mediante sviluppo in serie per $0 \leq \pi < \Pi$. Pertanto possiamo ri-scrivere l'espressione della soluzione rispetto ai prezzi (4.24) nella forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T &= w(\pi)\mathbf{a}_0^T[\mathbf{I} - (1 + \pi)\mathbf{A}]^{-1} = \\ &= w(\pi)\mathbf{a}_0^T + w(\pi)(1 + \pi)\mathbf{a}_0^T\mathbf{A} + w(\pi)(1 + \pi)^2\mathbf{a}_0^T\mathbf{A}^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.32)$$

Nel generico addendo della soluzione scritta in termini di serie compaiono i vettori $\mathbf{a}_0^T\mathbf{A}^s$ che, come già notato commentando la (4.27) indicano le quantità di lavoro richieste nei vari “stadi” logici in cui si svolge la produzione (la produzione finale, la produzione dei mezzi di produzione, la produzione dei mezzi di produzione dei mezzi di produzione e così via). Ora però ciascuno di tali addendi risulta moltiplicato per un fattore, $(1 + \pi)^s$, dove s indica lo stadio di produzione in cui tale lavoro è stato erogato. Tali quantità di lavoro risultano così “datate”: si tiene cioè conto non solo della quantità di lavoro che è stata man mano immessa nel processo produttivo di ciascuna merce, ma anche del *tempo* durante il quale questa immissione è rimasta immobilizzata prima dell’ottenimento della merce finale. I prezzi sono dunque stati ricondotti a *lavoro e tempo*: due grandezze che – assieme all’altro fattore originario (la terra) – costituiscono il “capitale” secondo diversi approcci teorici.

4.6 L’ipotesi di intensità di capitale uniforme

Siamo ora in grado di analizzare dettagliatamente come si caratterizza e che implicazioni assume l’ipotesi classica di intensità di capitale uniforme all’interno dello schema di Sraffa. È interessante analizzare quest’ipotesi in quanto tale poiché, lungi dal costituire un caso rilevante dal punto di vista pratico, costituisce un punto di riferimento per la comprensione di alcune delle complicazioni che si incontrano nei casi in cui essa non vale.

Supponiamo che per un dato livello del saggio di profitto, $\pi = \bar{\pi} \in [0, \Pi]$, si abbia che il rapporto tra il valore del capitale e la quantità di lavoro necessari a produrre una unità di ciascuna merce sia uguale in tutti i settori

a un dato livello κ :

$$\frac{\mathbf{p}^T(\bar{\pi})\mathbf{a}_m}{a_{0m}} = \kappa \quad m = 1, \dots, M, \quad (4.33)$$

che è equivalente a:

$$\mathbf{p}^T(\bar{\pi})\mathbf{A} = \kappa\mathbf{a}_0^T. \quad (4.33')$$

Sostituendo la (4.33') nell'equazione generale dei prezzi (4.1) si ottiene:

$$\mathbf{p}^T(\bar{\pi}) = \mathbf{p}^T(\bar{\pi})\mathbf{A}(1 + \bar{\pi}) + \frac{w}{\kappa}\mathbf{p}^T(\bar{\pi})\mathbf{A}.$$

cioè

$$\mathbf{p}^T(\bar{\pi})\mathbf{A} = \varphi(\bar{\pi})\mathbf{p}^T(\bar{\pi}), \quad (4.34)$$

dove $\varphi(\bar{\pi}) := \frac{\kappa}{\kappa(1+\bar{\pi})+w}$. Pertanto se vale la (4.33) il vettore dei prezzi risulta essere autovettore sinistro di \mathbf{A} . Poiché ci interessano vettori di prezzi semi-positivi sarà

$$\varphi(\bar{\pi}) = \lambda^* = \frac{1}{1 + \Pi^*}.$$

Sostituendo ora la (4.34) nella (4.33') si ha:

$$\mathbf{p}^T(\bar{\pi}) = [\kappa(1 + \bar{\pi}) + w]\mathbf{a}_0^T;$$

$\mathbf{p}^T(\bar{\pi})$ è dunque multiplo di \mathbf{a}_0 ; pertanto poiché $\mathbf{p}^T(\bar{\pi})$ è autovettore sinistro di \mathbf{A} si ha che:

* \mathbf{a}_0 è autovettore sinistro di \mathbf{A} corrispondente all'autovalore λ^* :

$$\mathbf{a}_0^T \mathbf{A} = \frac{1}{1 + \Pi^*} \mathbf{a}_0^T. \quad (4.35)$$

Si noti questo risultato è stato ottenuto per $\pi = \bar{\pi}$; quanto detto finora non garantisce che al variare di π la (4.33') valga ancora: in altri termini l'intensità capitalistica di un processo produttivo è un concetto che, per definizione, dipende dai prezzi e, al variare di π , potrebbe variare, cosicché si potrebbe pensare che se per un dato saggio di profitto si ha intensità capitalistica uniforme non è detto che si abbia intensità capitalistica uniforme in corrispondenza degli altri valori di π . Si può tuttavia dimostrare che ciò non può accadere. Infatti partendo dall'espressione dei prezzi generale (cioè valida per ciascun livello di π) e utilizzando l'espansione mediante sviluppo in serie di potenze si ha:

$$\mathbf{p}^T = w(\pi)\mathbf{a}_0^T + w(\pi)(1 + \pi)\mathbf{a}_0^T \mathbf{A} + w(\pi)(1 + \pi)^2\mathbf{a}_0^T \mathbf{A}^2 + \dots \quad (4.32)$$

Considerando però il fatto che \mathbf{a}_0 si è ottenuto che è autovettore sinistro di \mathbf{A} (e questo risultato è ovviamente indipendente da π) si può riscrivere l'espressione generale dei prezzi (4.32) nella forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T &= w(\pi)\mathbf{a}_0^T + w(\pi)\frac{1+\pi}{1+\Pi^*}\mathbf{a}_0^T + w(\pi)\left(\frac{1+\pi}{1+\Pi^*}\right)^2\mathbf{a}_0^T + \dots \\ &= w(\pi)\mathbf{a}_0^T \left[1 + \frac{1+\pi}{1+\Pi^*} + \left(\frac{1+\pi}{1+\Pi^*}\right)^2 + \dots \right] \\ &= w(\pi)\frac{1+\Pi^*}{\Pi^*-\pi}\mathbf{a}_0^T \end{aligned} \quad (4.36)$$

Dalla (4.36) si vede che per qualsiasi valore di π i prezzi *relativi* non variano al variare della distribuzione del reddito. Di conseguenza l'intensità capitalistica del metodo di produzione della generica industria m è dato da:

$$\kappa_m = w(\pi)\frac{1+\Pi^*}{\Pi^*-\pi}\frac{\mathbf{a}_0^T\mathbf{a}_m}{a_{0m}}, \quad m = 1, \dots, M.$$

Al variare di π tutti i κ_m variano nella stessa proporzione; pertanto si ha che:

★ se per $\pi = \bar{\pi}$ si ha intensità capitalistica uniforme fra i metodi di produzione delle varie merci tale uniformità si mantiene per tutti i livelli del saggio di profitto.

Dalla (4.36) si vede inoltre la regolarità con cui il lavoro viene impiegati nei vari stadi “temporali” della produzione:

$$s = 0 : \mathbf{a}_0^T, \quad s = -1 : \frac{1}{1+\Pi^*}\mathbf{a}_0^T, \quad s = -2 : \left(\frac{1}{1+\Pi^*}\right)^2\mathbf{a}_0^T, \quad \dots;$$

ogni vettore di immissioni di lavoro è $(1+\Pi^*)$ volte quello “precedente”.

Si osservi anche come dalla (4.36) si ha che per ciascun livello del saggio di profitto i prezzi relativi sono determinati esclusivamente dalle quantità di lavoro diretto. Si osservi inoltre che $\mathbf{a}_0^T(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{a}_0^T - \mathbf{a}_0^T\mathbf{A} = \left(1 - \frac{1}{1+\Pi^*}\right)\mathbf{a}_0^T = \left(\frac{\Pi^*}{1+\Pi^*}\right)\mathbf{a}_0^T$ pertanto $\mathbf{a}_0^T = \frac{\Pi^*}{1+\Pi^*}\mathbf{a}_0^T(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$, cioè

$$\mathbf{a}_0^T = \frac{\Pi^*}{1+\Pi^*}\mathbf{v}^T. \quad (4.37)$$

\mathbf{v}^T è multiplo di \mathbf{a}_0 ; pertanto poiché \mathbf{a}_0 è autovettore sinistro di \mathbf{A} anche \mathbf{v}^T è autovettore sinistro di \mathbf{A} . Sostituendo la (4.37) nella (4.36) si ha

$$\mathbf{p}^T(\pi) = \frac{w\Pi^*}{\Pi^* - \pi} \mathbf{v}^T \quad (4.38)$$

Si ha dunque che

★ se i metodi di produzione delle merci hanno intensità capitalistica uniforme allora i prezzi delle merci sono proporzionali alle quantità di lavoro diretto e alle quantità di lavoro verticalmente integrato (cfr. equazioni (4.36) e (4.37)). I prezzi esprimono, cioè, la teoria del valore lavoro.

Poiché per ogni livello di π il vettore dei prezzi risulta proporzionale ai vettori \mathbf{a}_0 o \mathbf{v} anche il vettore dei prezzi è anch'esso autovettore sinistro della matrice \mathbf{A} ,

$$\mathbf{p}^T = (1 + \Pi^*)\mathbf{p}^T \mathbf{A}.$$

Come anticipato paragrafo 4.5

★ se i metodi di produzione delle merci hanno intensità capitalistica uniforme allora i prezzi delle merci sono proporzionali al valore del capitale necessario a produrle; essi esprimono cioè la teoria del valore capitale.

Nella terminologia di Marx il vettore dei coefficienti di lavoro diretto, \mathbf{a}_0 , è il vettore del capitale variabile, il vettore dei coefficienti di lavoro indiretto, $\mathbf{v} - \mathbf{a}_0$, è il vettore del capitale costante; grazie alla (4.37) si ha che $\mathbf{v} - \mathbf{a}_0 = (1/\Pi^*)\mathbf{a}_0$; ponendo $\gamma := 1/\Pi^*$ si ottiene

$$\mathbf{v} - \mathbf{a}_0 = \gamma\mathbf{a}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_m - a_{0m}}{a_{0m}} = \gamma. \quad (4.39)$$

γ , essendo il rapporto tra il capitale costante e il capitale variabile corrisponde alla nozione marxiana di “composizione organica del capitale”. Dalla (4.39) si vede che

★ l'ipotesi di intensità capitalistica uniforme implica l'uniformità della composizione organica del capitale.

L'ipotesi di uniformità dell'intensità capitalistica ha effetti anche sulla relazione tra salario unitario e saggio di profitto. Si è appena visto che nel caso di intensità capitalistica uniforme il vettore dei prezzi risulta l'autovettore sinistro della matrice \mathbf{A} corrispondente all'autovalore di modulo

massimo, $\lambda^* = 1/(1 + R)$. In tal caso il sistema dei prezzi assume la forma:

$$\mathbf{p}^T = (1 + \pi)\mathbf{p}^T \mathbf{A} + w\mathbf{a}_0^T = \frac{1 + \pi}{1 + \Pi^*}\mathbf{p}^T + w\mathbf{a}_0^T \quad (4.40a)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{b} = 1. \quad (4.40b)$$

Sostituendo la (4.40a) nella (4.40b) si ottiene:

$$\frac{1 + \pi}{1 + \Pi^*} + w\mathbf{a}_0^T \mathbf{b} = 1. \quad (4.41)$$

Come si vede anche nel caso di intensità capitalistica uniforme la relazione tra il salario unitario e il saggio di profitto assume una forma molto semplice: è diventata una retta. La linearità così ottenuta tra salario unitario e saggio di profitto riflette il fatto che queste due grandezze appaiono legate in maniera *lineare* nell'equazione che descrive il sistema dei prezzi. Poiché nel caso di intensità capitalistica uniforme i prezzi relativi non dipendono dalla distribuzione del reddito, ma sono determinati esclusivamente dalle quantità di lavoro non si instaurano fenomeni di interdipendenza fra prezzi e distribuzione e quest'ultima appare, per così dire, nella sua essenza, che in questo caso si riflette, analiticamente, nella linearità. Se inoltre supponiamo che il vettore \mathbf{b} soddisfa la condizione

$$\mathbf{a}_0^T \mathbf{b} = \frac{R^*}{1 + R^*}$$

(ipotesi che possiamo sempre fare in quanto non vincola la *composizione* del vettore \mathbf{b} ma solo la sua *scala*)) possiamo affermare che

★ *se vale l'ipotesi di intensità capitalistica uniforme la relazione tra il salario unitario e il saggio di profitto assume la forma*

$$\pi = \Pi^*(1 - w);$$

tale relazione coincide con l'espressione che la stessa assume nel sistema tipo e in un qualunque sistema che non sia nelle proporzioni tipo a condizione di esprimere tutti i prezzi e il salario unitario in termini di merce tipo. Ciò avviene però in questo caso non per le particolari proporzioni fra le merci prodotte nel sistema in considerazione, o per le particolari proporzioni che costituiscono il numerario, ma per il fatto che nell'ipotesi di intensità di capitale uniforme i prezzi relativi sono determinati esclusivamente dalle quantità di lavoro: essi sono pertanto noti prima di fare ipotesi circa la distribuzione

del reddito, e pertanto possono essere presi per dati per calcolare il saggio di profitto una volta dato il salario (o viceversa)). Viene meno cioè, come si era già visto in Ricardo, qualunque fenomeno di *interdipendenza* fra prezzi e distribuzione e si evidenzia il legame *additivo* tra le variabili distributive implicito nell'equazione dei prezzi (4.1).⁷

4.7 Variazione dei prezzi al variare della distribuzione del reddito

4.A Perché variano i prezzi

Si è visto che dal punto di vista *analitico* i prezzi relativi variano in maniera imprevedibile quando varia la distribuzione del reddito, cioè quando varia π . La relazione trovata che esprime questa dipendenza è la (4.24). Vediamo ora di capire dal punto di vista *economico* le ragioni per cui al variare di π i prezzi relativi variano. Supponiamo che il saggio di profitto sia inizialmente fissato a un dato livello, $\bar{\pi}$, in corrispondenza del quale il sistema dei prezzi e il salario unitario – espressi in termini di un dato numerario \mathbf{b} – siano, rispettivamente, $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\bar{\pi})$ e $\bar{w} = w(\bar{\pi})$. Essi pertanto soddisfano le equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1 &= (1 + \bar{\pi})\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{a}_1 + \bar{w}a_{n1} \\ &\dots \\ \bar{p}_m &= (1 + \bar{\pi})\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{a}_m + \bar{w}a_{nm} \\ &\dots \\ \bar{p}_m &= (1 + \bar{\pi})\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{a}_m + \bar{w}a_{nm} \end{aligned} \right\} \quad (4.42a)$$

$$1 = \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{b} = (1 + \bar{\pi})\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{A} \mathbf{b} + \bar{w} \mathbf{a}_0^T \mathbf{b}. \quad (4.42b)$$

⁷È istruttivo esaminare brevemente il caso in cui i salari, anziché essere pagati alla fine del periodo produttivo, come appare dal sistema (4.1), sono pagati all'inizio del periodo di produzione. In tal caso il sistema dei prezzi assume la forma (4.23), e ragionando analogamente a prima si ottiene ancora che se vale l'ipotesi di intensità capitalistica uniforme i vettori \mathbf{a}_0 e \mathbf{p} risultano autovettori sinistri di \mathbf{A} ; tenendo conto di ciò si ottiene, procedendo analogamente, che la relazione fra il salario unitario e il saggio di profitto diventa:

$$\pi = \frac{\Pi^*(1-w)}{1 + \Pi^*w}.$$

Anche in questo caso la proporzionalità fra prezzi e quantità di lavoro permette di semplificare il legame tra le due variabili distributive, evidenziandone il legame *moltiplicativo* implicito nella (4.23).

Supponiamo ora che si abbia una variazione, poniamo un aumento, del saggio di profitto, $\Delta\pi$. Come dovrebbero variare le altre variabili, cioè il salario unitario e i prezzi relativi affinché le equazioni (4.42) continuino a rimanere soddisfatte? La risposta non è immediata, in quanto tutte le variabili sono interdipendenti fra loro. Per cercare di capire cominceremo a ragionare in maniera causale, seguendo il ragionamento di Sraffa. Supponiamo dapprima che tutti i prezzi rimangano invariati. Allora una riduzione *uniforme* del salario unitario (qualunque essa sia) non sarebbe sufficiente a ripristinare il pareggio del bilancio in tutte le industrie (a ristabilire l'uguaglianza tra il primo membro – ricavo – e il secondo – costo – in tutte le equazioni): infatti in quelle industrie che impiegano una proporzione sufficientemente alta di merci rispetto al lavoro si originerà un *surplus*, mentre in quelle industrie che impiegano una proporzione sufficientemente bassa di merci rispetto al lavoro si originerà un *deficit*. Se vogliamo eliminare i *surplus* e i *deficit* è *necessario* che i prezzi delle merci varino.

L'unica merce che non andrebbe soggetta a questa necessità di variare il proprio prezzo al fine di ripristinare il pareggio del bilancio sarebbe quella merce – se esiste – che è prodotta impiegando lavoro e mezzi di produzione in quella “proporzione critica’ fra lavoro e mezzi di produzione che [segna] lo spartiacque fra industrie ‘in avanzo’ e industrie ‘in disavanzo’.” (Sraffa (1960, p. 20))

4.B In che direzione variano i prezzi

Il ragionamento espresso nel paragrafo precedente spiega *perché* variano i prezzi quando varia la distribuzione. Vediamo ora se si può dire qualche cosa circa la *direzione* di queste variazioni. Un primo e provvisorio “indicatore” è costituito dal rapporto fra il valore dei mezzi di produzione e il lavoro impiegato in ciascuna industria (l'intensità capitalistica). Più precisamente osservando le equazioni (4.42a) possiamo affermare che se un'industria, poniamo la “1”, ha un'intensità capitalistica superiore a quella media, la riduzione di salario (Δw) conseguente all'aumento del saggio di profitto ($\Delta\pi$) non sarà sufficiente a ripristinare il pareggio del bilancio:

$$\Delta\pi\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{a}_1 > 0, \Delta w a_{n1} < 0 \quad \text{ma} \quad |\Delta\pi\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{a}_1| > |\Delta w a_{n1}|.$$

Sarà pertanto necessario che il prezzo della merce “1” *aumenti*. Su questa base si potrà sostenere che aumenteranno i prezzi di quelle merci che hanno intensità capitalistica superiore alla media e si ridurranno i prezzi delle merci che hanno intensità capitalistica inferiore alla media. Questa conclusione, come si è detto, è però provvisoria, in quanto non tiene conto del

fatto che la variazione dei prezzi così ottenuta influenza anche le grandezze a secondo membro delle equazioni (4.42a), $\mathbf{p}^T \mathbf{a}_m, m = 1, \dots, M$, e cioè le intensità capitalistiche delle diverse industrie, date dai rapporti $\mathbf{p}^T \mathbf{a}_m / a_{n\mu}$. Se continuassimo a pensare in termini causali potremmo osservare infatti che a seguito di queste variazioni delle intensità capitalistiche delle varie industrie, si genererebbe una nuova serie di *deficit* e *surplus* in tutte le industrie; ciò renderebbe necessario un nuovo *round* di variazioni dei prezzi delle merci per ristabilire il pareggio del bilancio in ciascuna industria; di nuovo ciò altererebbe le intensità capitalistiche delle varie industrie e si assisterebbe così a una serie infinita di variazioni dei prezzi, la cui direzione è chiaramente imprevedibile.

4.C Influenza del numerario

Abbiamo finora visto come la variazione dei prezzi relativi delle merci sia il modo con cui viene ripristinato il pareggio del bilancio nelle varie industrie a seguito di una variazione della distribuzione. Ma osservando le equazioni (4.42) si vede come questo strumento sia a disposizione di tutte le industrie meno una, quella che produce la merce usata come numerario,⁸ in quanto il suo prezzo, per definizione, è fissato pari a 1. D'altra parte la riduzione generalizzata del salario unitario non sarà in generale adeguata a eliminare il *surplus* o il *deficit* che si origina nell'industria che produce il numerario, a causa delle differenze fra le proporzioni fra lavoro e mezzi di produzione che caratterizza tale industria rispetto alle altre. Non potendo neanche variare il suo prezzo "assoluto" l'unica via che rimane a disposizione per ottenere un suo rincaro o un suo ribasso che elimini il *deficit* o il *surplus* originatosi è quello di far variare ancora i prezzi delle altre merci, di tutte le altre merci: queste infatti, come si vede, appaiono tra le variabili anche nell'equazione (4.42b). Pertanto su questi stessi prezzi si andranno a "scaricare" oltre alle pressioni derivanti dai *deficit* o dai *surplus* che si originano nelle rispettive industrie, anche quelli che si originano nell'industria del numerario. Quindi al variare della distribuzione del reddito (di π) i prezzi delle merci espressi in termini del generico numerario \mathbf{b} dovranno variare non solo per ripristinare il pareggio del bilancio nella corrispondente industria, ma anche per ripristinare il pareggio del bilancio nell'industria che produce la merce usata come numerario.

Tutto ciò può anche essere visto analiticamente calcolando dal sistema (4.42) le variazioni che il salario unitario e i prezzi devono subire in totale

⁸Tale industria può essere costituita effettivamente da una singola industria o da un "aggregato" di industrie.

al fine di ripristinare il pareggio del bilancio in tutte le industrie: ⁹

$$\Delta \mathbf{p}^T [\mathbf{I} - (1 + \bar{\pi} + \Delta\pi) \mathbf{A}] - \Delta w \mathbf{a}_n^T = \Delta\pi \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{A} \quad (4.45a)$$

$$-\Delta \mathbf{p}^T (1 + \bar{\pi} + \Delta\pi) \mathbf{A} \mathbf{b} - \Delta w \mathbf{a}_n^T \mathbf{b} = \Delta\pi \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{A} \mathbf{b}. \quad (4.45b)$$

Dal sistema (4.45) si vede che il vettore delle variazioni dei prezzi, $\Delta \mathbf{p}$, è presente sia nelle equazioni (4.45a) che nelle equazioni (4.45b). La presenza di $\Delta \mathbf{p}$ tra le variabili dell'equazione (4.45b) mostra, appunto, che quando varia la distribuzione del reddito i prezzi di ciascuna merce subiscono non uno, ma *due* tipi di pressioni, che potremmo chiamare “effetto Specifico di prezzo” ed “effetto Numerario”:

- (S) *effetto Specifico di prezzo*: variazione del prezzo di una merce dovuta alla necessità di ripristinare il pareggio del bilancio nella industria corrispondente;
- (N) *effetto Numerario*: variazione del prezzo di una merce dovuta alla necessità di ripristinare il pareggio del bilancio nell'industria che produce la merce numerario.

La compresenza di entrambi questi effetti sul prezzo di una merce al variare della distribuzione del reddito era già stata intuita da Ricardo quando si rese conto che per isolare la variazione del prezzo relativo di una data merce sarebbe stato necessario utilizzare come numerario una merce il cui valore relativo fosse invariante rispetto a variazioni della distribuzione del reddito. In altre parole la presenza dell'effetto (N) rende

impossibile dire di una particolare variazione di prezzo se essa sorga dalle peculiarità della merce che viene misurata o da quelle della merce che viene presa come misura. Sraffa (1960, p. 23)

⁹Per ottenere il sistema (4.45) si osservi che $\bar{\mathbf{p}}$ e \bar{w} – i prezzi e il salario prevalenti quando $\pi = \bar{\pi}$ – soddisfano, per definizione, il sistema:

$$\bar{\mathbf{p}}^T = (1 + \bar{\pi}) \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{A} + \bar{w} \mathbf{a}_n^T \quad (4.43a)$$

$$1 = (1 + \bar{\pi}) \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{A} \mathbf{b} + \bar{w} \mathbf{a}_n^T \mathbf{b}; \quad (4.43b)$$

siano poi $\bar{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p}$ e $\bar{w} + \Delta w$ i prezzi e il salario che si hanno quando $\pi = \bar{\pi} + \Delta\pi$; essi soddisfano, per definizione, il sistema:

$$\bar{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p}^T = (1 + \bar{\pi} + \Delta\pi) (\bar{\mathbf{p}}^T + \Delta \mathbf{p}^T) \mathbf{A} + (\bar{w} + \Delta w) \mathbf{a}_n^T \quad (4.44a)$$

$$1 = (1 + \bar{\pi} + \Delta\pi) (\bar{\mathbf{p}}^T + \Delta \mathbf{p}^T) \mathbf{A} \mathbf{b} + (\bar{w} + \Delta w) \mathbf{a}_n^T \mathbf{b} \quad (4.44b)$$

semplificando, tenendo conto delle relazioni (4.43) e riordinando i termini si ottiene il sistema (4.45).

Per contrasto possiamo definire *misura invariabile del valore* una merce che, se usata come numerario, rende l'effetto (\mathbf{N}) nullo, cioè un numerario che non dà origine a pressioni sui prezzi delle altre merci al fine di ristabilire il pareggio del bilancio nella propria industria.

4.8 La merce tipo come misura invariabile del valore

Si può verificare a questo punto che la merce tipo di Sraffa costituisce una misura invariabile del valore nel senso definito alla fine del precedente paragrafo 4.C.

Se infatti esprimiamo tutti i prezzi e il salario unitario nei termini della merce tipo, ossia se poniamo

$$\mathbf{p}^T \mathbf{y}^* = 1$$

si può vedere che il sistema (4.45) prende la forma:¹⁰

$$\Delta \mathbf{p}^T [\mathbf{I} - (1 + \bar{\pi} + \Delta\pi) \mathbf{A}] - \Delta w \mathbf{a}_0^T = \Delta \pi \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{A} \quad (4.49a)$$

$$-\Delta w R^* = \Delta \pi. \quad (4.49b)$$

Si vede immediatamente che il vettore delle variazioni dei prezzi, $\Delta \mathbf{p}$, è presente *solo* nelle equazioni (4.49a), e *non* nell'equazione (4.49b). Quindi per

¹⁰Per ottenere il sistema (4.49) sappiamo che valgono le relazioni:

$$\bar{\mathbf{p}}^T = (1 + \bar{\pi}) \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{A} + \bar{w} \mathbf{a}_0^T \quad (4.46a)$$

$$1 = (1 + \bar{\pi}) \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{A} \mathbf{y}^* + \bar{w} \mathbf{a}_0^T \mathbf{y}^*; \quad (4.46b)$$

e

$$(\bar{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p})^T = (1 + \bar{\pi} + \Delta\pi) (\bar{\mathbf{p}}^T + \Delta \mathbf{p}^T) \mathbf{A} + (\bar{w} + \Delta w) \mathbf{a}_0^T \quad (4.47a)$$

$$1 = (1 + \bar{\pi} + \Delta\pi) (\bar{\mathbf{p}}^T + \Delta \mathbf{p}^T) \mathbf{A} \mathbf{y}^* + (\bar{w} + \Delta w) \mathbf{a}_0^T \mathbf{y}^*. \quad (4.47b)$$

Tenendo conto delle (4.46) le (4.47) diventano:

$$\Delta \mathbf{p}^T [\mathbf{I} - (1 + \pi + \Delta\pi) \mathbf{A}] - \Delta w \mathbf{a}_0^T = \Delta \pi \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{A} \quad (4.48a)$$

$$-(1 + \pi + \Delta\pi) \Delta \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{y}^* - \Delta w \mathbf{a}_0^T \mathbf{y}^* = \Delta \pi \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{A} \mathbf{y}^*. \quad (4.48b)$$

Grazie alle (4.12) la (4.48b) diventa:

$$-(1 + \pi + \Delta\pi) \Delta \mathbf{p}^T \mathbf{y}^* \frac{1}{1 + R^*} - \Delta w \frac{R^*}{1 + R^*} = \Delta \pi \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{y}^* \frac{1}{1 + R^*}, \quad (4.48b')$$

ma poiché $\bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{y}^* = 1$ e $(\bar{\mathbf{p}}^T + \Delta \mathbf{p}^T) \mathbf{y}^* = 1$ si ha che $\Delta \mathbf{p}^T \mathbf{y}^* = 0$; pertanto la (4.48b') diventa:

$$-\Delta w R^* = \Delta \pi$$

e si ottiene così il sistema (4.49).

ripristinare il pareggio del bilancio nell'industria della merce tipo in seguito a una variazione del saggio di profitto è sufficiente variare il salario secondo l'equazione (4.49b): la variazione della componente 'valore del capitale più profitto' e la variazione della componente salari si compensano esattamente nell'industria della merce tipo. Quando varia la distribuzione del reddito i prezzi continuano a variare; tali variazioni saranno determinate soltanto dalla necessità di ripristinare il pareggio del bilancio nelle rispettive industrie, non nell'industria (aggregata) della merce tipo. Ciò significa che la merce tipo, se usata come numerario, rende l'effetto (**N**) nullo. Pertanto la merce tipo costituisce una misura invariabile del valore. Questa proprietà discende dalle particolari proporzioni tra lavoro e mezzi di produzione che caratterizzano l'industria (aggregata) nella quale essa viene prodotta. Pertanto essa, se usata come numerario, ci permette di osservare le variazioni dei prezzi relativi di ciascuna delle merci, in risposta a cambiamenti della distribuzione del reddito, isolatamente, ("come *in vacuo*", Sraffa (1960, p. 24, corsivo nell'originale), senza che esse risultino frammischiate ai disturbi che sorgono dalle "peculiarità [...] della merce che viene presa come misura" (Sraffa (1960, p. 23)). Si noti che il fatto che prezzi e salario sono espressi in termini di merce tipo non implica affatto che le quantità effettivamente prodotte nel sistema siano nelle proporzioni "tipo". Le (4.12) sono servite soltanto per costruire un numerario con opportune caratteristiche. Come già osservato nella nota 5 libera tutta la presente analisi da ipotesi relative ai rendimenti di scala.

4.9 La distinzione tra merci base e merci non-base

Buona parte dei risultati analitici ottenuti sono stati presentati in due versioni, una "debole" (per es. vettori semipositivi, relazioni non-crescenti) e una "forte" (per es. vettori positivi, relazioni crescenti), a seconda che la matrice dei coefficienti tecnologici fosse rispettivamente decomponibile o indecomponibile. Analizziamo ora più dettagliatamente il significato economico di questa distinzione e alcune delle sue implicazioni analitiche. Cominciamo a osservare, per esempio, le seguenti matrici dei coefficienti tecnologici che rappresentano quattro diverse tecniche produttive:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0,7 \\ 0,8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ \hline 0 & 0 & 0,3 \end{array} \right].$$

Nel caso della tecnica rappresentata dalla matrice **A** si vede che entrambe le merci sono richieste sia direttamente che indirettamente per la produzione di ciascuna di esse. Nel caso della tecnica rappresentata dalla matrice **B** le due merci non svolgono un ruolo simmetrico: la merce “1” è richiesta per produrre la merce “2”, ma, al contrario, la merce “2” non è richiesta per produrre la merce “1”; essa serve solo per produrre se stessa. Se per una qualunque ragione in un sistema caratterizzato dalla seconda tecnica dovesse interrompersi la produzione di merce “1” tutto il sistema rimarrebbe inattivo; se dovesse interrompersi la produzione di merce “2” rimarrebbe inattiva solo la seconda industria e la prima continuerebbe a funzionare. Non avviene la stessa cosa nel caso della tecnica rappresentata dalla matrice **A**: ciascuna merce è necessaria a se stessa e alla produzione dell'altra. Una cosa simile avviene nel caso della tecnica rappresentata dalla matrice **C**: anche se ciascuna merce non rientra *direttamente* nella produzione di se stessa (la merce “1” non è impiegata nella produzione di merce “1” e la merce “2” non è impiegata nella produzione di merce “2”) esse rientrano tra i cosiddetti requisiti *indiretti*: fissiamo l'attenzione sulla prima industria: per produrre una unità di merce “1” bisogna impiegare 0 unità di merce “1” e “0,8” unità di merce “2”; ma per produrre queste 0,8 unità di merce “2” sono necessarie $0,7 \times 0,8$ unità di merce “1”; in questo senso la merce “1” è richiesta *indirettamente* nella produzione di se stessa; analogo discorso può essere fatto per la merce “2”. In queste circostanze si capisce che se l'attività produttiva di una delle due industrie viene interrotta non è possibile intraprendere l'attività produttiva dell'altra. Concludendo nel caso delle tecniche rappresentate dalle matrici **A** e **C** le due merci sono entrambe *indispensabili* per il funzionamento dell'intero sistema; nel caso della tecnica rappresentata dalla matrice **B** solo la merce “1” possiede questa proprietà; la merce “2” no. Sraffa ha chiamato *merci base* le prime e *merci non-base* le seconde. Sulla base delle stesse argomentazioni si può vedere che nel caso della matrice **D** le merci “1” e “2” sono merci base, mentre la merce “3” è una merce non-base. Questa distinzione può essere fatta a livello analitico osservando che le tecniche che impiegano *solo* merci base sono rappresentate da matrici *irriducibili* o *indecomponibili*. Viceversa le tecniche in cui sono presenti merci base e merci non-base sono rappresentate da matrici *riducibili* o *decomponibili*. All'interno di queste matrici decomponibili è sempre possibile ravvisare un blocco quadrato indecomponibile che si riferisce alle merci base.

Le conseguenze analitiche ed economiche di questa distinzione fra merci (e quindi fra matrici dei coefficienti) possono essere viste immediatamente osservando il sistema dei prezzi e la sua soluzione nel caso in cui vi siano

merci base e merci non-base. In questo caso in termini generali la matrice dei coefficienti tecnologici, dopo un opportuno scambio di righe e delle corrispondenti colonne, può essere rappresentata nella forma:

$$\mathbf{A}_{(m,m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

dove \mathbf{A}_{kk} è una matrice quadrata indecomponibile che rappresenta la tecnica di produzione delle merci base e $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$ è la matrice con m righe e $m - k$ colonne che rappresenta la tecnica di produzione delle merci non-base. Suddividiamo in maniera analoga anche il vettore dei coefficienti di lavoro, il vettore dei prezzi e il vettore delle merci usate come numerario del sistema dei prezzi:

$$\mathbf{a}_0^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{01}^T & \mathbf{a}_{02}^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T & \mathbf{p}_2^T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Svolgendo i prodotti a blocchi il sistema dei prezzi (4.1) assume la forma:

$$\mathbf{p}_1^T = \mathbf{p}_1^T \mathbf{A}_{11} (1 + \pi) + w \mathbf{a}_{01}^T \quad (4.52a)$$

$$\mathbf{p}_2^T = \mathbf{p}_1^T \mathbf{A}_{12} (1 + \pi) + \mathbf{p}_2^T \mathbf{A}_{22} (1 + \pi) + w \mathbf{a}_{02}^T \quad (4.52b)$$

$$\mathbf{p}_1^T \mathbf{b}_1 + \mathbf{p}_2^T \mathbf{b}_2 = 1. \quad (4.52c)$$

Se scegliamo come numerario del sistema dei prezzi una merce, anche composta, costituita solo da merci base, cioè se poniamo $\mathbf{b}_2 = \mathbf{o}$ è possibile risolvere il sistema (4.52) in maniera causale: isolando al solito \mathbf{p}_1^T nella (4.52a) si ha

$$\mathbf{p}_1^T = w \mathbf{a}_{01}^T [\mathbf{I} - (1 + \pi) \mathbf{A}_{11}]^{-1}. \quad (4.53)$$

Sostituendo questa espressione trovata per il vettore \mathbf{p}_1^T nella (4.52c) e risolvendo rispetto a w si ottiene la relazione fra il salario unitario (espresso in termini della merce composta \mathbf{b}_1) e il saggio di profitto:

$$w(\pi) = \frac{1}{\mathbf{a}_{01}^T [\mathbf{I} - (1 + \pi) \mathbf{A}_{11}]^{-1} \mathbf{b}_1}. \quad (4.54)$$

Sostituendo poi l'espressione trovata di w in funzione di π nella (4.53) si ottiene il vettore dei prezzi delle merci base:

$$\mathbf{p}_1^T = w(\pi) \mathbf{a}_{01}^T [\mathbf{I} - (1 + \pi) \mathbf{A}_{11}]^{-1}. \quad (4.55)$$

Da ultimo sostituendo le espressioni trovate per il salario unitario e per il vettore dei prezzi delle merci base nella (4.52b) e risolvendo rispetto a \mathbf{p}_2^T si ottiene il vettore dei prezzi delle merci non-base:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_2^T &= [w(\pi)\mathbf{a}_{02}^T + \mathbf{p}_1^T(\pi)\mathbf{A}_{12}(1 + \pi)][\mathbf{I} - (1 + \pi)\mathbf{A}_{22}]^{-1} = \\ &= w(\pi)\mathbf{a}_{02}^T[\mathbf{I} - (1 + \pi)\mathbf{A}_{22}]^{-1} + \\ &+ w(\pi)\mathbf{a}_{01}^T[\mathbf{I} - (1 + \pi)\mathbf{A}_{11}]^{-1}\mathbf{A}_{12}(1 + \pi)[\mathbf{I} - (1 + \pi)\mathbf{A}_{22}]^{-1}.\end{aligned}\quad (4.56)$$

Dalle espressioni appena trovate si vede che la relazione fra il salario unitario e il saggio di profitto (4.54) e i prezzi delle merci base (4.55) e il saggio massimo di profitto¹¹ dipendono *solo* dalla tecnica di produzione delle merci base, $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} \\ \mathbf{a}_{01} \end{bmatrix}$. I prezzi delle merci non-base, (4.56) dipendono invece dalla tecnica di produzione *sia* delle merci base *che* da quella delle merci non-base.

La distinzione fra merci base e merci non-base ha anche un insieme di conseguenze anche sul lato delle quantità, e in particolare in relazione al sistema tipo e alla merce tipo. Si consideri il sistema di equazioni (4.6) che definisce le quantità prodotte nel sistema tipo. Supponiamo ancora di suddividere in blocchi la matrice dei coefficienti tecnologici, \mathbf{A} , e il vettore dei coefficienti di lavoro diretto, \mathbf{a}_0^T come indicato nelle (4.50) e (4.51). Indichiamo con \mathbf{q}_1^* l'autovettore destro della sottomatrice \mathbf{A}_{11} corrispondente all'autovalore di modulo massimo di \mathbf{A}_{11} :

$$(1 + R^*)\mathbf{A}_{11}\mathbf{q}_1^* = \mathbf{q}_1^*.$$

Da ciò segue che il vettore $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^* \\ \mathbf{o} \end{bmatrix}$ soddisfa l'equazione $(1 + R^*)\mathbf{A}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*$, in quanto si ha:

$$(1 + R^*)(\mathbf{A}_{11}\mathbf{q}_1^* + \mathbf{A}_{12}\mathbf{o}) = \mathbf{q}_1^* \quad \Leftrightarrow \quad (1 + R^*)\mathbf{A}_{11}\mathbf{q}_1^* = \mathbf{q}_1^* \quad (4.57)$$

$$(1 + R^*)(\mathbf{O}\mathbf{q}_1^* + \mathbf{A}_{22}\mathbf{o}) = \mathbf{o} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{o} = \mathbf{o} \quad (4.58)$$

Nel sistema tipo si producono soltanto (si possono produrre soltanto) merci base e la merce tipo è composta (può essere composta) soltanto da merci base. In tal caso il saggio fisico uniforme di sovrappiù dipende solo dalla tecnica di produzione delle merci base in quanto $R^* = 1/\lambda^*(\mathbf{A}_{11})$.

¹¹Nota sul "caso aberrante"

Capitolo 5

Il modello di von Neumann

5.1 Descrizione dell'economia

Osserviamo il suo funzionamento di un sistema economico nel tempo, che sarà suddiviso in periodi della stessa durata finita. Il sistema economico in esame ha le seguenti caratteristiche.

IPOTESI 1 Esistono M merci, che sono al tempo stesso sia fattori produttivi che prodotti.

IPOTESI 2 Esistono N processi produttivi lineari e additivi (non necessariamente a produzione singola).

Tali processi verranno rappresentati mediante una coppia di vettori colonna, $\mathbf{a}_n = [a_{mn}]$, $\mathbf{b}_n = [b_{mn}]$, $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$, dove a_{mn} indica la quantità di merce m impiegata nel processo produttivo n quando questo è attivato a livello unitario e b_{mn} indica la quantità di merce m prodotta dal processo produttivo n quando questo è attivato a livello unitario. L'insieme delle tecniche produttive disponibili sarà così rappresentabile mediante una coppia di matrici (date), \mathbf{A} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n \cdots \mathbf{a}_N] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_M^T \end{bmatrix} = [a_{mn}],$$

e

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n \cdots \mathbf{b}_N] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_M^T \end{bmatrix} = [b_{mn}]$$

aventi entrambe M righe ed N colonne. In questo contesto M non coincide necessariamente con M : il numero delle merci non coincide con quello dei processi.

IPOTESI 3 Ogni processo produttivo richiede almeno una merce come input per essere attivato, cioè $\mathbf{a}_m \geq \mathbf{o}, \forall m$.

IPOTESI 4 Ciascuna merce può essere prodotta da almeno un processo produttivo, cioè per ogni m esiste almeno un n tale che $b_{mn} > 0$.

Solo i lavoratori consumano; le quantità dei beni consumate dai lavoratori sono da considerarsi incluse nei coefficienti di produzione; in formule ciò significa che $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+$ e $\mathbf{d}\mathbf{a}_0^T$, dove \mathbf{d} è il vettore delle sussistenze di ciascuna unità di lavoro e \mathbf{a}_0 è il vettore dei coefficienti unitari di lavoro.

I capitalisti reinvestono tutto il profitto nell'accumulazione di nuovi beni capitali. La quantità di lavoro disponibile è illimitata.

Il sistema ha l'obiettivo di *riprodursi nel tempo*; le quantità impiegate di beni prodotti in un periodo $t-1$ diventano quantità di inputs che si possono impiegare nel periodo successivo t . Vale pertanto la relazione:

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_t \leq \mathbf{B}\mathbf{q}_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.1)$$

dove \mathbf{q} rappresenta il vettore (incognito) dei livelli di attivazione dei processi.

IPOTESI 5 Il sistema economico si trova in condizioni di concorrenza perfetta.

Vale pertanto la seguente condizione di assenza di extra-profitti:

$$\mathbf{p}_t^T \mathbf{B} \leq \mathbf{p}_{t-1}^T \mathbf{A}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.2)$$

dove \mathbf{p} indica il vettore (incognito) dei prezzi.

Von Neumann ha concentrato l'attenzione sui sentieri di sviluppo proporzionale, nei quali, cioè, si ha:

$$\mathbf{q}_t = (1 + G)\mathbf{q}_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{p}_t = \frac{1}{1 + \Pi}\mathbf{p}_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.4)$$

dove G e Π sono due costanti positive (incognite), che possono essere interpretate, dal punto di vista economico, come un saggio proporzionale di crescita del sistema e il saggio di interesse, rispettivamente.

5.2 Equilibrio di von Neumann

Tra tutti i possibili sentieri di dinamica proporzionale von Neumann si concentra sulla ricerca di quel sentiero che *massimizza* G e *minimizza* Π .

Sotto le cinque ipotesi fatte si dimostra che tale sentiero esiste. Più precisamente si dimostra il seguente:¹

PROPOSIZIONE 1 *Sotto le ipotesi 1-5 esistono $G^* > -1$, $\Pi^* > -1$, $\mathbf{q}^* \geq \mathbf{o}$ e $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{o}$ che soddisfano le seguenti relazioni:*

$$\mathbf{B}\mathbf{q}^* \geq (1 + G^*)\mathbf{A}\mathbf{q}^*, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{p}^{*T}\mathbf{B} \leq (1 + \Pi^*)\mathbf{p}^{*T}\mathbf{A}, \quad (5.6)$$

$$G^* = \Pi^*. \quad (5.7)$$

Si può osservare che pre-moltiplicando la (5.5) per \mathbf{p}^{*T} si ottiene:

$$\mathbf{p}^{*T}\mathbf{B}\mathbf{q}^* \geq (1 + G^*)\mathbf{p}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{q}^*; \quad (5.8)$$

inoltre post-moltiplicando la (5.6) per \mathbf{q}^* si ottiene:

$$\mathbf{p}^{*T}\mathbf{B}\mathbf{q}^* \leq (1 + \Pi^*)\mathbf{p}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{q}^*. \quad (5.9)$$

Per la (5.7) i due secondi membri delle (5.8) e (5.9) sono uguali, pertanto esse possono essere scritte come due equazioni:

$$\mathbf{p}^{*T}\mathbf{B}\mathbf{q}^* = (1 + G^*)\mathbf{p}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{q}^*, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{p}^{*T}\mathbf{B}\mathbf{q}^* = (1 + \Pi^*)\mathbf{p}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{q}^*. \quad (5.11)$$

¹Per la dimostrazione si veda, ad esempio, Gale (1960, cap. 9), oppure Manara e Nicola (1966, cap. VI).

Leggendo ora la (5.5) congiuntamente alla (5.10) si vede che per quelle merci m per le quali la disequaglianza (5.5) vale in senso stretto ($\mathbf{b}_m^T \mathbf{q}^* > (1 + G^*) \mathbf{a}_m^T \mathbf{q}^*$), ossia per le quali si ha un saggio di crescita superiore al saggio uniforme G^* , il corrispondente prezzo è nullo in equilibrio, $p_m^* = 0$.

D'altra parte, leggendo la (5.6) congiuntamente alla (5.11) si vede che per quei processi n per i quali la disequaglianza (5.6) vale in senso stretto ($\mathbf{p}^{*T} \mathbf{b}_n < (1 + \Pi) \mathbf{p}^{*T} \mathbf{a}_n$), ossia per quei processi per i quali si hanno profitti negativi, il corrispondente livello di attivazione è nullo in equilibrio ($q_n^* = 0$).

5.3 Un caso particolare

Consideriamo ora il caso in cui il numero delle merci è uguale al numero dei processi produttivi; in tal caso le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} diventano quadrate. Supponiamo inoltre che tali processi produttivi siano tutti a produzione singola: ciò comporta che la matrice \mathbf{B} diventa una matrice diagonale. Mediante un'opportuna scelta dell'unità con cui misurare le varie merci prodotte la matrice \mathbf{B} può diventare la matrice identità, \mathbf{I} , e il vettore \mathbf{q} dei livelli di attivazione dei processi può essere interpretato anche come il vettore delle quantità prodotte. In tal caso le relazioni che definiscono il modello di von Neumann (5.1)-(5.4) diventano:

$$\mathbf{q} \geq (1 + G) \mathbf{A} \mathbf{q}, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{p}^T \leq (1 + \Pi) \mathbf{p}^T \mathbf{A}. \quad (5.13)$$

Tali relazioni sono già state studiate nello schema di Sraffa: la (5.12) nel momento in cui si è definito il sistema tipo (si veda l'equazione (4.6a)) e la (5.13) quando si è studiato il sistema dei prezzi di Sraffa in corrispondenza del saggio massimo di profitto (si veda l'equazione (4.28a)). Si è visto in precedenza che entrambi questi sistemi ammettono una soluzione economicamente significativa (determinata a meno di un fattore di scala) in corrispondenza della quale le relazioni sono soddisfatte come uguaglianze. Questa coincidenza fra le equazioni che definiscono il sistema tipo e le disequazioni relative alle quantità prodotte del modello di von Neumann mostrano che il saggio fisico uniforme di sovrappiù costituisce anche il massimo saggio di crescita uniforme di un sistema economico. In tale ambito è immediato verificare le uguaglianze $R^* \equiv G^* \equiv \Pi^*$.

Capitolo 6

Convergenza dell'equilibrio generale intertemporale verso l'equilibrio classico di lungo periodo

6.1 Introduzione

Si è spesso sostenuto che l'analisi classica della produzione del valore e della distribuzione sia da considerare diversa e antitetica rispetto all'analisi neoclassica e, in particolare, all'analisi di equilibrio economico generale. Indubbiamente marcate differenze esistono, a livello di concezione del sistema economico, delle forze che in esso operano, degli obiettivi che ciascuna di esse si pone. Tuttavia negli anni '80 è stato provato alcuni risultati analitici rilevanti, che hanno permesso di cogliere parecchi elementi comuni esistenti nella struttura logica dei due approcci. Il punto di contatto fra questi due filoni è costituito da quei risultati analitici che vanno sotto il nome di "teoremi dell'autostrada" (*turnpike theorems*). Si tratta di una serie di lavori apparsi verso la fine degli anni '50 (il primo teorema dell'autostrada è stato provato da Dorfman Robert (1958)). Le prime formulazioni erano presentate a scopo di programmazione: data una composizione iniziale di beni capitali, \mathbf{x}_0 , ci si poneva il problema di quale fosse il metodo più rapido per raggiungere una data struttura finale di beni capitali, \mathbf{x}_T . Con questi teoremi si dimostrava (cfr., ad esempio, Koopmans (1964) che il metodo più efficiente fosse quello inizialmente di far assumere al sistema la struttura compatibile con la crescita bilanciata, per sfruttare il fatto che lungo questo sentiero – come dimostrato da von Neumann – si raggiunge il tasso di crescita massimo; successivamente quando il sistema è arrivato nelle vicinanze della struttura finale desiderata di composizione del capitale, si opera per far convergere il sistema verso tale struttura (si veda il grafico (a) della figura 6.1). Versioni

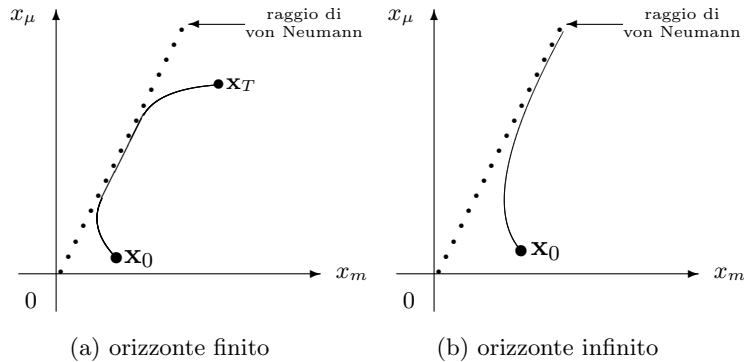


Figura 6.1: Teoremi dell'autostrada

successive di questi teoremi si sono invece concentrate sull'analisi dei casi in cui l'orizzonte temporale è infinito.¹ In tal caso è stato dimostrato Bewley (1982) che partendo da una qualsiasi composizione iniziale di beni capitali, x_0 , la successione degli equilibri intertemporali converge verso il sentiero di crescita bilanciata (si veda il grafico (b) della figura 6.1).

Alcuni lavori successivi, (ad es. Dana e Lévy (1984), Dana-Florenzano-Le Van-Lévy, (1989a) e (1989b) hanno re-interpretato e generalizzato questo risultato mostrando come, sotto opportune condizioni, la successione degli equilibri intertemporali di un'economia con orizzonte infinito è tale per cui le quantità prodotte convergono verso un sentiero di crescita bilanciata e i prezzi (di mercato) convergono verso i prezzi naturali. Vediamo qui di seguito la versione più semplice di tale risultato, che corrisponde, sostanzialmente, al modello proposto in Dana e Lévy (1984).

6.2 Un modello di equilibrio generale intertemporale

Consideriamo un sistema economico descritto da un modello di equilibrio generale intertemporale. Nel nostro modello ci sono M merci, che possono essere utilizzate sia come beni di consumo che come mezzi di produzione, e T periodi. Ciascuna merce è così identificata da due indici, m , che si riferisce alla sua qualità fisica e t , che si riferisce alla data in cui essa sarà disponibile (in totale si hanno così MT beni).

¹Per una rassegna si veda ?)

Supponiamo che nell'economia sia disponibile solo una tecnica di produzione a rendimenti di scala costanti rappresentata dalla matrice socio-tecnica \mathbf{A} . Supponiamo inoltre che la matrice \mathbf{A} sia irriducibile e primitiva.²

In questo contesto tutti i contratti di compravendita delle merci, presenti e future, hanno luogo alla stessa data iniziale. I rapporti di scambio tra le merci possono essere espressi da due vettori di prezzo: i) il vettore dei *prezzi scontati*, $\bar{\mathbf{p}}_t$; in questo caso i prezzi di tutte le merci, sia disponibili nel periodo corrente che in tutti i periodi futuri, sono espressi in termini dello stesso paniere di merci, \mathbf{b} , disponibile al tempo 0; tali prezzi sono ottenuti ponendo $\bar{\mathbf{p}}_0^T \mathbf{b} = 1$ una volta e per tutti i periodi; questo è il modo con cui usualmente sono espressi i prezzi nei modelli intertemporali di equilibrio economico generale; ii) il vettore dei *prezzi non-scontati*, \mathbf{p}_t ; in questo caso tutti i prezzi sono espressi in termini di un paniere di merci, \mathbf{b} , disponibile in ciascun corrispondente periodo t . Essi si ottengono ponendo in ciascun periodo:

$$\mathbf{p}_t^T \mathbf{b} = 1, \quad t = 1, \dots, T; \quad (6.1)$$

questo è il modo con cui usualmente vengono espressi i prezzi nei modelli sraffiani o, più in generale, nei modelli multisettoriali di produzione. Ovviamente in ciascun dato periodo i prezzi *relativi* di ciascuno dei due sistemi di prezzi sono identici, cioè i vettori $\bar{\mathbf{p}}_t$ e \mathbf{p}_t sono fra loro *proporzionali*; ciò, congiuntamente all'equazione (6.1), permette di ottenere la relazione che sussiste tra i due insiemi di prezzi:

$$\mathbf{p}_t = \frac{1}{\bar{\mathbf{p}}_t^T \mathbf{b}} \bar{\mathbf{p}}_t. \quad (6.2)$$

Siamo ora in grado di definire il vettore dei profitti delle I industrie al tempo t :

$$\boldsymbol{\xi}^T(\bar{\mathbf{p}}_t, \bar{\mathbf{p}}_{t-1}) := \bar{\mathbf{p}}_t^T - \bar{\mathbf{p}}_{t-1}^T \mathbf{A}.$$

L'ipotesi di rendimenti di scala costanti implica che in equilibrio i profitti sono nulli in ciascuna industria. In termini di prezzi scontati ciò significa che

$$\bar{\mathbf{p}}_t^T = \bar{\mathbf{p}}_{t-1}^T \mathbf{A}; \quad (6.3)$$

risolvendo per sostituzione si ottiene:

$$\bar{\mathbf{p}}_t^T = \bar{\mathbf{p}}_0^T \mathbf{A}^t. \quad (6.4)$$

²Una matrice irriducibile è *primitiva* se il suo autovalore di modulo massimo ha modulo strettamente maggiore a quello degli altri suoi autovalori.

In termini di prezzi non scontati, l'equazione (6.3) può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{p}_t^T = \frac{\bar{\mathbf{p}}_{t-1}^T \mathbf{b}}{\bar{\mathbf{p}}_t^T \mathbf{b}} \mathbf{p}_{t-1}^T \mathbf{A}. \quad (6.3')$$

È utile esaminare il significato dello scalare $\bar{\mathbf{p}}_{t-1}^T \mathbf{b} / \bar{\mathbf{p}}_t^T \mathbf{b}$. Il rapporto

$$\frac{\bar{p}_{m,t-1}}{\bar{p}_{m,t}} - 1 =: \varrho_{m,t-1} \quad (6.5)$$

è il cosiddetto “saggio proprio di interesse” della merce m al tempo $t-1$; il vettore \mathbf{b} è la merce composta che è usata come numerario (la “moneta”) del nostro sistema; così

$$\frac{\bar{\mathbf{p}}_{t-1}^T \mathbf{b}}{\bar{\mathbf{p}}_t^T \mathbf{b}} - 1 =: \varrho_{t-1} \quad (6.6)$$

può essere visto come il saggio di interesse specifico della merce usata come numerario, cioè il saggio monetario di interesse del sistema. Con questa definizione il sistema (6.3') può essere riscritto nella forma

$$\mathbf{p}_t^T = (1 + \varrho_{t-1}) \mathbf{p}_{t-1}^T \mathbf{A}. \quad (6.3'')$$

Dal punto di vista formale l'equazione (6.3'') è simile all'equazione (4.28a) che definisce il sistema dei prezzi di Sraffa nel caso in cui il salario unitario (di sovrappiù) è nullo. Ci sono, tuttavia, alcune differenze:

1. due *differenti* insiemi di prezzi sono usati per valutare gli inputs (\mathbf{p}_{t-1}) e gli outputs (\mathbf{p}_t), e, in generale, non ci sono ragioni per supporre che \mathbf{p}_t sia proporzionale a \mathbf{p}_{t-1} ; ciò comporta che in equilibrio i saggi propri di interesse delle varie merci *non sono uniformi*: infatti dalla (6.5) e grazie alla (6.2) e alla (6.6) si ha:

$$1 + \varrho_{m,t-1} = (1 + \varrho_{t-1}) \frac{p_{m,t-1}}{p_{mt}}$$

2. nell'equazione (6.3'') il saggio di “sovrappiù” tra outputs e inputs è il saggio di interesse, ϱ_{t-1} , che è *uniforme* tra le varie industrie, ma non coincide, in generale, col saggio naturale di profitto, Π^* . Inoltre esso varia al variare del tempo e dipende dalla scelta del numerario;
3. dalla (6.4) vediamo che il vettore dei prezzi $\bar{\mathbf{p}}_t$ dipende da $\bar{\mathbf{p}}_0$; grazie alla (6.2) ciò accade anche al vettore \mathbf{p}_t . Il vettore $\bar{\mathbf{p}}_0$ può essere pensato come il sistema dei prezzi d'equilibrio al tempo 0. Esso dipende, pertanto, da preferenze, tecnologia e dotazioni al tempo 0. Così

anche $\bar{\mathbf{p}}_t$ and \mathbf{p}_t dipendono da preferenze, tecnologia e dotazioni al tempo 0 (mentre i prezzi di produzione dipendono solo da tecnologia e distribuzione).

Quindi l'equilibrio di mercato del sistema *non* coincide, in generale, con l'equilibrio classico di lungo periodo. Ma se osserviamo questa economia su un orizzonte infinito è possibile provare la seguente proprietà asintotica:

PROPOSIZIONE 2 (DANA E LÉVY (1984)) *La sequenza degli equilibri generali intertemporali dell'economia considerata converge verso l'equilibrio classico di lungo periodo, cioè*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_t = \mathbf{p}^*, \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r_t = r^*.$$

Dimostrazione Si consideri la matrice $\mathbf{A}/\lambda_M(\mathbf{A})$: essa è primitiva e il suo autovalore dominante è 1; soddisfa pertanto la condizione di convergenza di Debreu e Herstein (1953, teorema V e, in particolare, il suo corollario a p. 605). Quindi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathbf{A}}{\lambda_M(\mathbf{A})} \right)^t = \frac{\mathbf{y}^* \mathbf{p}^{*T}}{\mathbf{p}^{*T} \mathbf{y}^*} \quad (6.7)$$

dove \mathbf{p}^{*T} è l'autovettore sinistro e \mathbf{y}^* è l'autovettore destro di $\mathbf{A}/\lambda_M(\mathbf{A})$, corrispondenti all'autovalore dominante 1. Si consideri ora l'espressione dei prezzi non scontati e del saggio di interesse:

$$\mathbf{p}_t^T = \frac{\bar{\mathbf{p}}_t^T}{\bar{\mathbf{p}}_t^T \mathbf{b}} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_0^T \mathbf{A}^t}{\bar{\mathbf{p}}_0^T \mathbf{A}^t \mathbf{b}} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_0^T [\mathbf{A}/\lambda_M(\mathbf{A})]^t}{\bar{\mathbf{p}}_0^T [\mathbf{A}/\lambda_M(\mathbf{A})]^t \mathbf{b}}, \quad (6.8)$$

$$1 + \varrho_t = \frac{\bar{\mathbf{p}}_{t-1}^T \mathbf{b}}{\bar{\mathbf{p}}_t^T \mathbf{b}} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_0^T \mathbf{A}^{t-1} \mathbf{b}}{\bar{\mathbf{p}}_0^T \mathbf{A}^t \mathbf{b}} = \frac{1}{\lambda_M(\mathbf{A})} \cdot \frac{\bar{\mathbf{p}}_0^T [\mathbf{A}/\lambda_M(\mathbf{A})]^{t-1} \mathbf{b}}{\bar{\mathbf{p}}_0^T [\mathbf{A}/\lambda_M(\mathbf{A})]^t \mathbf{b}}. \quad (6.9)$$

Calcolando il limite per $t \rightarrow \infty$ di queste espressioni; grazie alla (6.7) si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_t = \frac{\mathbf{p}^{*T}}{\mathbf{p}^{*T} \mathbf{b}},$$

cioè il vettore dei prezzi di produzione espresso in termini del numerario $\boldsymbol{\alpha}^T$, e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 1 + \varrho_t = \frac{1}{\lambda_M(\mathbf{A})} = 1 + r^*. \quad (\text{Q.E.D.})$$

Appendice A

Enunciati dei teoremi di Perron-Frobenius

1.1 Notazione

In tutto il testo sono state usate le seguenti convenzioni di scrittura.

Gli scalari sono indicati con lettere in corsivo, i vettori con lettere minuscole in grassetto e le matrici con lettere maiuscole in grassetto; i vettori sono pensati come vettori *colonna*; i vettori riga sono denotati dal simbolo di trasposizione, T : \mathbf{a} (vettore colonna), \mathbf{a}^T (vettore riga); inoltre sia $\mathbf{a} = [a_i] \in \mathfrak{R}^N$ e $\mathbf{b} = [b_i] \in \mathfrak{R}^N$; $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ significa $a_i > b_i, i = 1, \dots, N$, $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ significa $a_i \geq b_i, i = 1, \dots, N$ e $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ significa $a_i \geq b_i, i = 1, \dots, N$. La stessa convenzione vale per le matrici.

\mathbf{o} e \mathbf{O} sono, rispettivamente, un vettore e una matrice di elementi tutti nulli. Un vettore \mathbf{a} è *positivo* se $\mathbf{a} > \mathbf{o}$, *semi-positivo* se $\mathbf{a} \geq \mathbf{o}$, *non-negativo* se $\mathbf{a} \geq \mathbf{o}$. Una matrice \mathbf{A} è *positiva* se $\mathbf{A} > \mathbf{O}$, *semi-positiva* se $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, *non-negativa* se $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$.

1.2 Teoremi sulle matrici a elementi non-negativi

Valgono i seguenti teoremi.

TEOREMA 1 (PERRON-FROBENIUS) *Sia \mathbf{A} una matrice quadrata semi-positiva, irriducibile. Valgono i seguenti risultati:*

1. \mathbf{A} possiede un autovalore, λ^* , con le seguenti caratteristiche:
 - (a) λ^* è reale e positivo;
 - (b) $\lambda^* \geq |\eta|$, dove con η indica un qualunque altro autovalore di \mathbf{A} ;
 - (c) λ^* è radice semplice dell'equazione caratteristica.

2. A λ^* sono associati un autovettore destro, \mathbf{x}^* , e un autovettore sinistro, \mathbf{y}^{*T} , entrambi positivi ($\mathbf{x}^* > \mathbf{o}$ e $\mathbf{y}^{*T} > \mathbf{o}^T$).
3. Gli autovettori destri e sinistri associati a qualunque altro autovalore η di \mathbf{A} possiedono almeno una componente negativa.
4. λ^* è funzione continua e crescente degli elementi di \mathbf{A} .
5. Siano t ed s due scalari positivi tali che $s = 1/t$; se

$$s > \lambda^* \quad \text{o, equivalentemente,} \quad t < 1/\lambda^*$$

allora:

- (a) $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} > \mathbf{O}$ e $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1} > \mathbf{O}$;
 - (b) gli elementi di $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ sono funzioni continue e decrescenti di s e gli elementi di $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1}$ sono funzioni continue e crescenti di t .
6. Siano α_i^T le righe di \mathbf{A} e sia \mathbf{u} il vettore somma; si ha:

$$\min_i \alpha_i^T \mathbf{u} \leq \lambda^* \leq \max_i \alpha_i^T \mathbf{u},$$

ossia l'autovalore λ^* è compreso tra la minima e la massima delle somme per riga di \mathbf{A} . Analogo risultato vale per la minima e la massima delle somme per colonna.

TEOREMA 2 (PERRON-FROBENIUS) Sia \mathbf{A} una matrice quadrata semi-positiva, riducibile. Valgono i seguenti risultati:

1. \mathbf{A} possiede un autovalore, λ^* , con le seguenti caratteristiche:
 - (a) λ^* è reale e positivo;
 - (b) $\lambda^* \geq |\eta|$, dove con η indica un qualunque altro autovalore di \mathbf{A} ;
 - (c) (non c'è un corrispondente del risultato 1c).
2. A λ^* sono associati un autovettore destro, \mathbf{x}^* , e un autovettore sinistro, \mathbf{y}^{*T} , entrambi semi-positivi ($\mathbf{x}^* \geq \mathbf{o}$ e $\mathbf{y}^{*T} \geq \mathbf{o}^T$).
3. (non c'è un corrispondente del risultato 3)
4. λ^* è funzione continua e non-decrescente degli elementi di \mathbf{A} .

5. Siano t ed s due scalari positivi tali che $s = 1/t$; se

$$s > \lambda^* \quad \text{o, equivalentemente,} \quad t < 1/\lambda^*$$

allora:

(a) $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{O}$ e $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{O}$;

(b) gli elementi di $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ sono funzioni continue e non-crescenti di s e gli elementi di $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1}$ sono funzioni continue e non-decrescenti di t .

6. Siano α_i^T le righe di \mathbf{A} e sia \mathbf{u} il vettore somma; si ha:

$$\min_i \alpha_i^T \mathbf{u} \leq \lambda^* \leq \max_i \alpha_i^T \mathbf{u},$$

ossia l'autovalore λ^* è compreso tra la minima e la massima delle somme per riga di \mathbf{A} . Analogo risultato vale per la minima e la massima delle somme per colonna.

Bibliografia

- ARROW, K. J., E G. DEBREU (1954): "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica*, 22(3), 265–290.
- BAROZZI, G. C., E C. CORRADI (1985): *Matematica per le scienze economiche e statistiche*. Il Mulino, Bologna.
- BEWLEY, T. (1982): "An integration of equilibrium theory and turnpike theory," *Journal of Mathematical Economics*, 10(2/3), 233–267.
- DANA, R.-A., M. FLORENZANO, C. LE VAN, E D. LÉVY (1989a): "Asymptotic Properties of a Leontief Economy," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 13(4), 553–568.
- (1989b): "Production Prices and General Equilibrium Prices - A Long-Run Property of a Leontief Economy," *Journal of Mathematical Economics*, 18(18), 263–280.
- DANA, R.-A., E D. LÉVY (1984): "Comportment asymptotique de l'équilibre général en horizon infini," CEPREMAP, (8423).
- DEBREU, G., E I. N. HERSTEIN (1953): "Nonnegative Square Matrices," *Econometrica*, 21(4), 597–607.
- DORFMAN ROBERT, SAMUELSON PAUL ANTONY, S. R. M. (1958): *Linear Programming and Economic Analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London.
- GALE, D. (1960): *The Theory of Linear Economic Models*. McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London.
- KALDOR, N. (1955-56): "Alternative Theories of Distribution," *The Review of Economic Studies*, XXIII(2)(61), 83–100.

- KOOPMANS, T. C. (1964): "Economic Growth at a Maximal Rate," *Quarterly Journal of Economics*, LXXVIII(3), 355–394.
- MANARA, C. F., E P. C. NICOLA (1966): *Elementi di economia matematica*. Editrice Viscontea, Milano.
- MARX, K. (1861-63): *Theories of Surplus*.
- (1867-86-94): *Das Kapital*, vol. I, II, III. Meissner, Hamburg.
- MAS-COLELL, A., M. D. WHINSTON, E J. R. GREEN (1995): *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, Oxford and New York.
- MORISHIMA, M. (1973): *Marx's Economics. A Dual Theory of Value and Growth*. Cambridge University Press, Cambridge.
- PARETO, V. (1897): *Cours d'économie politique*.
- PASINETTI, L. L. (1960): "A Mathematical Formulation of the Ricardian System," *The Review of Economic Studies*, XXVII(2)(73), 78–98, trad. it. *Una formulazione matematica del sistema ricardiano*, in Luigi L. Pasinetti, *Sviluppo economico e distribuzione del reddito*, 1977, Il Mulino, Bologna,.
- (1975): *Lezioni di teoria della produzione*. Il Mulino, Bologna, 1a ediz.
- RICARDO, D. (1817): *On the Principles of Political Economy and Taxation*. John Murray, London, used edition: *On the Principles of Political Economy and Taxation*, Vol. 1 of Sraffa Piero (ed.) *The Works and the Correspondences of David Ricardo*, Cambridge University Press, Cambridge, 1951.
- SRAFFA, P. (1960): *Production of Commodities by means of Commodities – Prelude to a Critique of Economic Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.
- VON BORTKIEWICZ, L. (1907): "Zur Berichtigung der Grundlegenden theoretischen Konstruktion von Marx im dritten Band des "Kapital", " *Jahrb. für Nationalökonomie und Statistik*, 3(XXXIV), 319–335, trad. it. *Per una rettifica dei fondamenti della costruzione teorica di Marx nel terzo volume del Capitale* in Luca Meldolesi (a cura di), *La teoria economica di Marx e altri saggi*, 1971, Einaudi, Torino.

VON NEUMANN, J. (1938): "Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verllgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes," in *Ergebnisse eines Mathematischen Seminars*, ed. by K. Menger, no. 8. Vien, English transl. "A Model of General Economic Equilibrium", in *The Review of Economic Studies*, XIII-XIV, 1945-46, pp. 1-9.

WALRAS, L. (1874): *Elements d'économie politique pure*.

YAMANE, T. (1972): *Matematica per economisti*. Etas libri, Milano.