Appunti delle lezioni di Analisi economica

A.A. 2006-2007
(Versione provvisoria)

Enrico Bellino

Ottobre 2006

Sommario

Parte I

Alcuni richiami dei precedenti storici

Capitolo 1

I precursori dell'economia politica classica: i fisiocratici

1 Introduzione

La scuola fisiocratica è una scuola economica che precede lo sviluppo dell'Economia politica intesa come disciplina autonoma: l'inizio di quest'ultima viene normalmente fatto risalire alla pubblicazione, ad opera di Adam Smith (1776), dell'*Indagine sulla natura e sulle cause della ricchezza delle nazioni*. L'iniziatore della scuola fisiocratica è François Quesnay (1694–1774), medico chirurgo alla corte del re di Francia ed economista dilettante. La sua opera principale in campo economico è il *Tableau économique* (1758); in esso si dà una rappresentazione dei flussi di merci in un sistema stazionario; usando la terminologia moderna si potrebbe dire che si tratta della prima tavola delle interdipendenze inter-industriali (uno strumento che svilupperemo più avanti).

2 Il *Tableau économique*

Le idee centrali presenti nel *Tableau économique* sono le due seguenti:

- la nozione di *sovrappiù*, cioè di una eccedenza fisica delle quantità di merci prodotte rispetto a quelle che vanno re-impiegate nel processo produttivo sociale affinché questo possa ripetersi nel tempo su scala immutata; tale eccedenza sarà la grandezza che determina le rendite che percepiscono i proprietari terrieri;
- l'idea di produzione come *processo circolare*, cioè un processo nel

quale lo stesso tipo di merci appaiono sia tra i mezzi di produzione che tra i prodotti; infatti in ogni periodo di produzione oltre al sovrappiù devono essere ri-prodotte tutte le merci che vengono impiegate nel processo produttivo, affinché quest'ultimo possa ripetersi nel tempo.

Come si vedrà queste due idee caratterizzeranno la struttura logica delle teorie della produzione e della distribuzione del reddito sviluppate successivamente dagli economisti classici. Un'altra analogia con l'analisi classica è la suddivisione della società in classi perfettamente identificate dall'attività produttiva svolta. Secondo Quesnay tali classi sono:

- la *classe produttiva*, costituita dagli addetti all'agricoltura e all'attività mineraria; tale classe viene detta "produttiva" in quanto con queste attività si ottiene una quantità di merci *superiore* alle quantità degli stessi beni usati come mezzi di produzione; è infatti tale classe a produrre il prodotto netto o sovrappiù dell'economia;

- la *classe sterile*, costituita dagli artigiani e dai manifatturieri; è detta "sterile" in quanto essa non aggiunge nulla al prodotto netto: si limita a trasformare quanto prodotto dalla classe produttiva;

- la *classe aristocratica*, costituita da nobili e clero: sono i proprietari delle terre e percepiscono tutto il prodotto netto sotto forma di rendite sui terreni posseduti.

Data questa struttura sociale sono necessari degli *scambi* fra le classi affinché la ricchezza prodotta sia distribuita. Il *Tableau économique* da una rappresentazione grafica di questi scambi. Di seguito si proporrà una versione del *Tableau* diversa da quella originariamente data da Quesnay.

Il processo produttivo avviene durante un periodo di tempo finito, che potrebbe essere l'anno, dato che l'attività agricola gioca un ruolo preponderante in tutta l'analisi.[1].

[1]Con una terminologia più moderna si potrebbe dire che si tratta di un'analisi *periodale*, cioè una'analisi che prende le mosse dalla successione dei diversi periodi di tempo; questo a differenza della formulazione dell'analisi neoclassica di equilibrio generale, che—almeno nelle sue versioni più generali e diffuse—è basata su un concetto di equilibrio *istantaneo*

Alla fine del processo produttivo, *prima* che avvengano gli scambi la situazione delle diverse classi può essere rappresentata dalla figura 1.1, nella quale rappresentiamo mediante dei rettangoli bianchi un ammontare fisico di merce del valore, supponiamo, di un milione di euro; tali merci possono essere beni agricoli (A), manufatti (M) o materie prime (MP). Indichiamo poi con dei rettangoli quadrettati lo stesso ammontare di valore (1 milione di euro) in moneta.

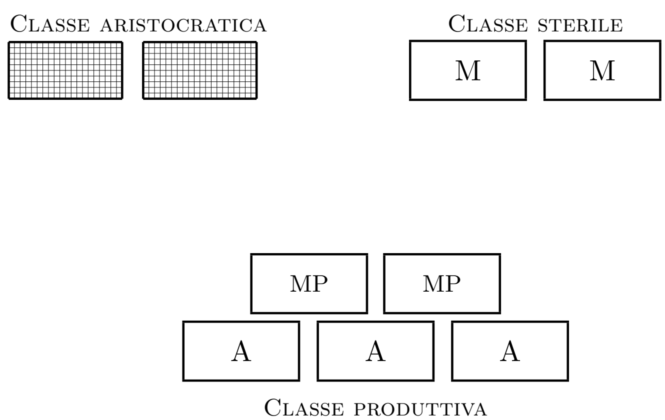


Figura 1.1: Situazione prima degli scambi

Supponiamo ora che avvengano gli scambi. Rappresentiamo con delle frecce continue i flussi reali (di merci) e con delle frecce tratteggiate i flussi monetari (vedi figura 1.2). La classe aristocratica acquista un milione di (unità monetarie in merce) A e un milione di M; dopo questi scambi la situazione diventa quella rappresentata nella figura 1.3. A questo punto la classe produttiva compra un milione di M e la classe sterile compra un milione di A: la situazione diventa quella rappresentata nella figura 1.4. Da ultimo la classe sterile acquista un milione di MP dalla classe produttiva. La situazione finale, dopo tutti gli scambi, è rappresentata dunque dalla figura 1.5.

I due milioni di unità monetarie, che alla fine degli scambi si trovano nelle mani della classe produttiva ritornano alla classe aristocratica sot-

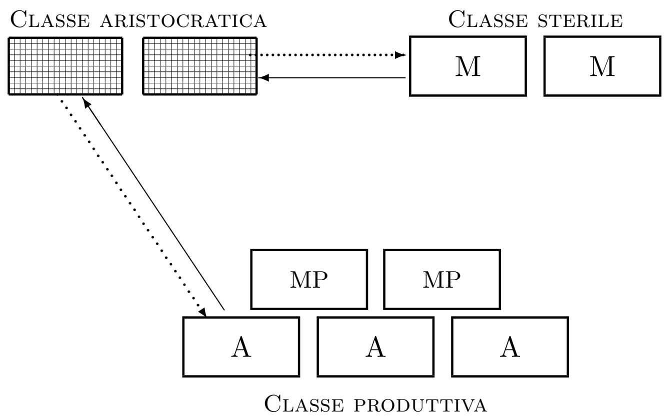


Figura 1.2: La classe aristocratica acquista A e M.

toforma di rendite per l'uso della terra. Tale ammontare monetario coincide con il valore del *prodotto netto* o *sovrappiù* dell'intero sistema. Come si vede dalla descrizione data del sistema il sovrappiù viene prodotto solo dal settore agricolo: è solo in esso che si impiegano merci per 3 milioni di unità monetarie (A, M ed MP) e si ottengono alla fine del processo produttivo merci per 5 milioni di unità monetarie (A, A, A, MP ed MP); la classe sterile non aggiunge nulla al sovrappiù; si limita a *trasformare* quanto prodotto dalla classe produttiva. Alla fine, comunuque, il sovrappiù viene percepito dalla classe aristocratica.

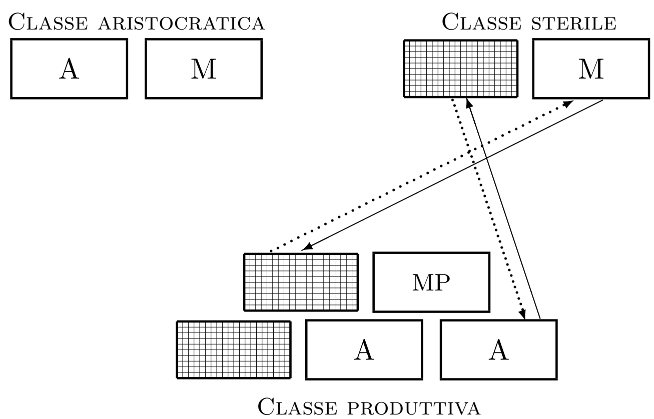


Figura 1.3: La classe produttiva acquista M e la classe sterile A.

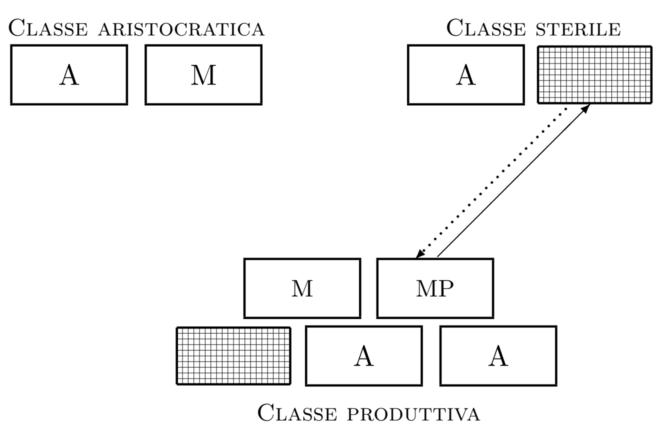


Figura 1.4: La classe sterile acquista MP.

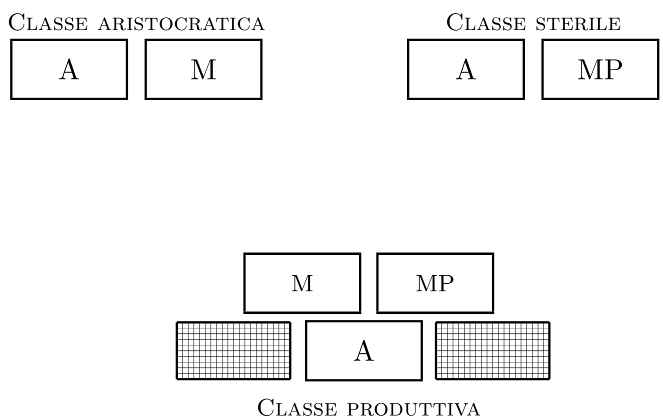


Figura 1.5: Situazione alla fine degli scambi.

Capitolo 2

Introduzione all'analisi classica della distribuzione del reddito e del valore

1 Struttura logica delle teorie del sovrappiù

Presentiamo in questo capitolo una semplice schematizzazione della struttura logica delle teorie della distribuzione del reddito basate sulla nozione di sovrappiù. Tale ossatura si ritroverà, sebbene in forme diverse, in tutte le principali teorie classiche della distribuzione del reddito, in particolare in Smith, Ricardo e Marx.

Il punto di partenza di tali teorie è l'analisi delle condizioni che devono essere soddisfatte affinché di periodo in periodo il processo produttivo sociale possa ripetersi su scala immutata. Il prodotto sociale, Q, viene così distinto in due parti:

1. la parte che deve essere re-impiegata nel processo produttivo affinché esso possa ripetersi; tale parte comprende:

    - le sussistenze dei lavoratori, W; tale grandezza indica l'ammontare di beni e servizi di cui un lavoratore mediamente ha bisogno per la sua sopravvivenza e la riproduzione (va notato che in tali teorie la nozione di sussistenza non va intesa in senso di sopravvivenza puramente "fisica"; essa si modifica in relazione alla crescita della società e viene ad includere man mano sempre più beni e servizi);
    - il reintegro dei mezzi di produzione impiegati e consumati nel processo produttivo, K;

2. la parte rimanente costituisce il sovrappiù, S.

Il legame fra queste quattro grandezze, è espresso dalla seguente equazione,

$$S = (Q - K) - W. \tag{2.1}$$

In tale contesto le sussistenze dei lavoratori vengono considerate come un dato, in quanto riflettono le abitudini di consumo di un lavoratore medio; si ha pertanto

$$W = \bar{W}. \tag{2.2}$$

La quantità del prodotto sociale e la quantità dei mezzi di produzione utilizzati in tale processo vengono considerate date in questa fase dell'analisi: è questa una peculiarità delle teorie degli economisti classici, che considerano le quantità (prodotte e impiegate) come date nel momento in cui si analizzano le determinanti della distribuzione del reddito e, come vedremo, del valore di scambio tra le merci.[1] Possiamo pertanto scrivere

$$Q = \bar{Q} \quad \text{e} \quad K = \bar{K}. \tag{2.3}$$

Si vede immediatamente che, grazie alle (2.2) e (2.3), l'equazione (2.1) è in grado di determinare l'ammontare del sovrappiù:

$$S = (\bar{Q} - \bar{K}) - \bar{W}, \tag{2.4}$$

in quanto tutte le grandezze che concorrono a determinare il sovrappiù (quelle alla destra del simbolo di uguaglianza) sono note *prima* della determinazione di quest'ultimo.

Inoltre si vede immediatamente che se l'ammontare dei salari, anziché rimanere fisso, potesse variare, si delinea una relazione monotonica e inversa fra il sovrappiù e il salario. Questo *trade-off* rispecchia l'ovvio legame inverso che deve sussistere tra le quote in cui si ripartisce la "torta" del prodotto sociale.

[1] Al contrario nell'approccio neoclassico, che vedremo successivamente, la determinazione delle quantità è simultanea a quella dei prezzi e della distribuzione del reddito, in quanto in quel contesto prezzi e distribuzione sono determinati attraverso le curve di domanda e offerta, che esprimono appunto una dipendenza funzionale fra prezzi e quantità.

Quanto detto finora costituisce l'ossatura fondamentale delle teorie della distribuzione del reddito basate sulla nozione di sovrappiù e, come si vede, ricalca molto da vicino quanto si è visto all'interno del *Tableau économique* di Quesnay, dove l'intero ammontare del sovrappiù veniva percepito dai propietari terrieri sotto forma di rendite.

2 Il contributo di Adam Smith

Adam Smith (1776) ha esteso questa teoria—che era stata concepita dai fisiocratici principalmente con riferimento al sistema agricolo—all'industria, includendo quindi nel sovrappiù anche i profitti assieme alle rendite:

$$S = P + R. \tag{2.5}$$

Questo passaggio costituisce una generalizzazione importante, in quanto per questa via, una volta individuato un principio per la determinazione delle rendite, in base al quale possiamo scrivere[2]

$$R = \bar{R}, \tag{2.6}$$

si ottiene una determinazione dei profitti in via residuale:

$$P = (\bar{Q} - \bar{K}) - \bar{W} - \bar{R}. \tag{2.7}$$

Si apre, però a questo punto un problema: nel sistema agricolo le grandezze che contribuiscono alla determinazione del sovrappiù possono essere considerate sufficientemente omogenee fra loro, in quanto il prodotto dell'agricoltura al netto del reintegro dei mezzi di produzione impiegati (sementi), $Q-K$, e le sussistenze dei lavoratori W sono costituite da due insiemi di prodotti agricoli aventi approssimativamente la stessa composizione fisica; tutte queste grandezze potevano dunque facilmente essere concepite e poste in relazione fra loro in termini *fisici*;[3] ora invece siamo di fronte a un sistema economico industrializzato, nel quale

[2] Non ci occupiamo in questo contesto di formulare una teoria della rendita; ne vedremo una nel capitolo successivo, quando si presenterà l'analisi ricardiana.

[3] Pur avendo a che fare con aggregati di merci eterogenee non c'era rischio di "sottrarre le pere dalle mele": se il prodotto sociale al netto del reintegro dei mezzi di produzione è costituito da un aggregato, poniamo, di 100 tonnellate di grano, 200

molto difficilmente accadrà che il prodotto netto abbia una composizione coincidente con quella delle sussistenze dei lavoratori. Il calcolo del sovrappiù, e quindi dei profitti, richiede perciò che le quantità presenti nell'equazione che determina i profitti siano espresse *in valore* anziché in termini fisici. Si rende così necessaria la conoscenza dei prezzi delle merci che compongono i diversi aggregati rilevanti; Smith si deve incamminare così nell'elaborazione di una *teoria del valore*.

Secondo Smith le determinanti del valore di una merce sono differenti a seconda che ci si trovi in una economia primitiva o in un'economia industrializzata. Nel primo caso, dove la produzione avviene prevalentemente mediante l'impiego di lavoro, ciò che regola il valore di una merce è il suo contenuto di lavoro in termini di ore di rinuncia al tempo li-

---

tonnellate di patate e 30 tonnellate di carne bovina e le sussistenze dei lavoratori sono costituite da 20 tonnellate di grano, 40 tonnellate di patate e 6 tonnellate di carne bovina, la differenza fra questi due aggregati di merci può essere facilmente calcolata in termini fisici:

$$\begin{bmatrix} \text{80 t. di grano} \\ \text{160 t. di patate} \\ \text{24 t. di carne} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{100 t. di grano} \\ \text{200 t. di patate} \\ \text{30 t. di carne} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{20 t. di grano} \\ \text{40 t. di patate} \\ \text{6 t. di carne} \end{bmatrix} \tag{2.4$'$}$$

In questo caso la composizione dell'aggregato di merci che costituisce il prodotto netto coincide con la composizione dell'aggregato di merci che costituisce la sussistenza dei lavoratori (un'ipotesi abbastanza accettabile per un sistema agricolo); il sovrappiù, che ne è la differenza, ha anch'esso la stessa composizione; ciascuno di questi aggregati può essere visto come un multiplo o una frazione di una *stessa* merce composita; convenzionalmente si potrebbe fissare come unità di una tale merce composita l'aggregato che costituisce le sussistenze dei lavoratori:

$$\text{1 unità di merce salario } = \begin{bmatrix} \text{20 t. di grano} \\ \text{40 t. di patate} \\ \text{6 t. di carne} \end{bmatrix}.$$

La relazione (2.4′) può così essere ri-espressa in termini puramente fisici attraverso la semplice sottrazione:

$$\underset{(S)}{4} = \underset{(\bar{Q}-\bar{K})}{5} - \underset{(\bar{W})}{1},$$

nella quale i numeri 4, 5 e 1 indicano tutti unità della stessa merce composita, la merce salario.

Si noti come tutto questo ragionamento poggia sull'ipotesi che il prodotto, le sussistenze dei lavoratori e, di conseguenza, il sovrappiù siano costituite dalla stessa merce.

bero. L'esempio fatto a questo proposito è quello del valore di un cervo rispetto a quello del castoro: se per cacciare la prima è necessario un tempo mediamente doppio del tempo necessario a cacciare il secondo allora la volpe ha un valore doppio rispetto al castoro. Dunque secondo Smith nelle economie primitive vale quella che è stata chiamata *teoria del valore lavoro*. Analiticamente questa teoria può essere espressa mediante l'equazione:

$$\frac{p_m}{p_\mu} = \frac{\ell_m}{\ell_\mu},$$

dove p_m/p_μ indica il prezzo relativo della merce m espresso in termini della merce μ e i simboli ℓ_m e ℓ_μ indicano le quantità di lavoro incorporati, rispettivamente, nella merce m e nella merce μ.

In un'economia industrializzata, nella quale la produzione richiede l'utilizzo di altri fattori di produzione oltre al lavoro, cioè il capitale e la terra, il prezzo di una merce deve remunerare anche questi fattori. Pertanto in questo contesto il *prezzo naturale* di una merce, secondo Smith è dato dalla somma di salari e profitti e rendite pagati al loro livello "naturale".[4] Il prezzo di ciascuna merce m può pertanto essere determinato da un'equazione del tipo:

$$p_m = W_m + P_m + R_m, \quad m = 1, \ldots, M \tag{2.8}$$

dove p_m indica il prezzo di una unità di merce m, W_m, P_m e R_m indicano i livelli naturali rispettivamente del salario, del profitto e della rendita necessari a produrre una unità di merce m e M indica il numero delle merci. Di conseguenza per analizzare le economie che sono in grado di generare un sovrappiù si deve fare riferimento a questo secondo tipo di teoria del valore.

Si potrebbe osservare che nel prezzo di ciascuna merce prodotta in un'economia industrializzata deve essere compreso anche il prezzo dei

[4]Per completezza va ricordato che con riferimento alle economie industrializzate Smith distingue fra *prezzi di mercato* e *prezzi naturali*: i prezzi di mercato sono determinati dalla domanda e dall'offerta, e pertanto risentono di tutti i disturbi temporanei e accidentali che subiscono nel breve periodo le condizioni di domanda e di offerta; nel lungo periodo tali oscillazioni si compensano e i prezzi gravitano attorno ai prezzi naturali.

materiali che sono stati utilizzati per produrre questa merce (per esempio nel prezzo del pane sono inclusi i prezzi della farina e del lievito, così come l'ammortamento del forno utilizzato nella cottura, etc.). Poiché però secondo Smith il valore di questi materiali è a sua volta costituito da salari, profitti e rendite, l'intero prezzo di ciascuna merce è riducibile, in ultima analisi, a queste tre categorie di reddito.

Ma allora anche l'intero prodotto annuo della società, al netto della reintegrazione dei beni utilizzati nella produzione, è riducibile anch'esso alla totalità dei salari, dei profitti e delle rendite pagate in tutto il sistema economico. In formule:

$$\sum_{m=1}^{M} p_m(\bar{q}_m - \bar{k}_m) = \sum_{m=1}^{M} W_m + \sum_{m=1}^{M} P_m + \sum_{m=1}^{M} R_m,$$

dove $\bar{q}_m$ e $\bar{k}_m$ indicano l'ammontare di merce m rispettivamente prodotta e reimpiegata nel processo produttivo (le barre al di sopra delle variabili riguardanti le quantità stanno a indicare che anche in questo contesto continuiamo a supporre tali quantità come date).

Si pone a questo punto il problema di come si determinano i livelli "naturali" di salari, rendite e profitti. Su questo punto Smith mantiene l'ipotesi che i salari siano determinati dalla sussistenza dei lavoratori, poniamo $\bar{W} = \sum_{m=1}^{M} \bar{W}_m = \sum_{m=1}^{M} p_m \bar{x}_m N$, dove le $\bar{x}_m$ indicano le quantità delle varie merci usate come sussistenza dai lavoratori impiegati nella produzione di merce m. Le rendite vengono determinate in base a principi nei quali non ci addentriamo in questa fase dell'analisi; ci limitiamo soltanto a dire che esse saranno fissate ai livelli $\bar{R} = \sum_{m=1}^{M} \bar{R}_m$. I profitti $P = \sum_{m=1}^{M} \pi_m$ possono essere determinati residualmente con l'equazione del sovrappiù, che in questo contesto con merci eterogenee assume la forma:

$$P = \sum_{m=1}^{M} p_m(\bar{q}_m - \bar{k}_m) - \sum_{m=1}^{M} p_m \bar{x}_m N - \bar{R}$$

Questo modo di procedere però apre due ordine di problemi, uno di carattere "economico", e uno di carattere "logico".

- La presenza dei prezzi nell'equazione del sovrappiù sembra dar corpo all'idea che variazioni in un senso di una delle tre variabili distributive non debbano necessariamente essere controbilanciate da variazioni nella direzione opposta di almeno un'altra variabile distributiva. Al contrario sembrerebbe che ciascuna di esse possa essere fissata in maniera indipendente dalle altre: un aumento dei profitti potrebbe essere, ad esempio, "accomodato" da una opportuna variazione dei prezzi senza richiedere necessariamente una riduzione dei salari e/o delle rendite.[5] Tale situazione sarebbe contro la ragionevole constatazione che la relazione che regola ciascuna coppia di variabili distributive debba, a parità di altre condizioni, essere monotonica e inversa, debba cioè evidenziare l'esistenza di un *trade-off* tra queste variabili. Detto in altri termini la presenza dei prezzi nell'equazione del sovrappiù permetterebbe di affermare che, a livello aggregato, il valore del prodotto sociale è tanto più alto quanto, a parità di salari, sono più alti i profitti e le rendite, cioè il sovrappiù.

- Il problema di carattere "logico" è ancora più evidente: ci troviamo in un sistema nel quale per conoscere i profitti è necessario conoscere i prezzi, al fine di valutare gli aggregati di merci che costituiscono il prodotto lordo, i beni capitale e le sussistenze dei lavoratori. Ma questi prezzi sono determinati, a loro volta, da salari, rendite *e profitti*, come indicato nell'equazione (2.8). Ci troviamo così di fronte a un ragionamento "circolare", in quanto è venuta meno la condizione richiamata a pag. 18 per cui le grandezze che si concorrono a determinare il sovrappiù devono essere conosciute *prima* della determinazione del sovrappiù stesso.

  Il tentativo di superare il primo e soprattutto il secondo di questi due problemi è alla base degli sforzi compiuti da Ricardo di elaborare una teoria della distribuzione del reddito indipendente dalla teoria del valore. Vedremo che Ricardo riuscirà solo parzialmente in questi sforzi.

---

[5] Smith ad esempio scrive: "the natural price varies with the natural rate of *each* of its component parts" (Smith (1776, libro I, capitolo VI, vol I, p. 56, corsivo aggiunto)).

Capitolo 3

Teoria ricardiana della distribuzione e del valore

1 La teoria ricardiana della distribuzione

1.1 Schema con una sola merce: il "modello del grano"

Le idee centrali della teoria ricardiana della distribuzione possono essere presentate mediante un semplice schema analitico presentato da Kaldor (1955-56) e successivamente formalizzato in modo dettagliato da Pasinetti (1975, § 3.1). Si consideri un sistema economico composto da tre classi sociali: proprietari terrieri, capitalisti e lavoratori. I capitalisti impiegano i lavoratori sulle terre che i proprietari terrieri danno loro in coltivazione. Nel sistema economico viene prodotto un solo bene, il grano, secondo la funzione di produzione:

$$Q = f(N) \tag{3.1a}$$

dove Q indica la quantità di grano prodotta e N il numero dei lavoratori impiegati. Per la funzione f si suppone che valgano le seguenti ipotesi:

(I.1) $f(N) \geq 0$;

(I.2) $f'(N) > 0$;

(I.3) $f''(N) < 0$;

(I.4) $f'(1) \geq \bar{x}$,

dove f' e f'' indicano, rispettivamente, la derivata prima e seconda della funzione f e $\bar{x}$ indica la quantità di grano che costituisce il salario di sussistenza di un lavoratore.

L'ipotesi (I.1) significa semplicemente che la quantità prodotta di grano non può essere negativa. Le ipotesi (I.2) e (I.3) affermano che al crescere dei lavoratori il prodotto cresce in misura meno che proporzionale; ciò formalizza l'idea di Ricardo secondo cui esistono terre con diversi gradi di fertilità; i capitalisti, che agiscono in maniera razionale, mettono a coltivazione dapprima le terre più fertili e, man mano, quelle meno fertili: ciò significa che al crescere del numero di lavoratori impiegati il prodotto ottenuto da ciascuno dei successivi lavoratori impiegati sarà decrescente. Si hanno cioè *rendimenti di scala decrescenti*.[1]

L'ipotesi (I.4) significa che quando viene impiegato il primo lavoratore ($N = 1$) la quantità di grano da lui prodotta è almeno sufficiente a pagare il suo salario di sussistenza. È, potremmo dire, una condizione di *vitalità* del sistema: se non fosse verificata saremmo di fronte a un sistema che non può perpetuarsi nel tempo, in quanto non è in grado di produrre neanche quanto serve a mantenere un solo lavoratore (gli altri eventuali lavoratori impiegati produrrebbero ancora meno, in quanto verrebbero impiegati su terreni di minor fertilità).

Studiamo ora come il prodotto totale dell'economia, Q, si distribuisce fra le tre classi sociali sottoforma di rendite, R, ai proprietari terrieri, di salari, W, ai lavoratori e di profitti, P, ai capitalisti.

• *Rendite.* Dati i diversi gradi di fertilità delle terre si è supposto che i capitalisti mettano a coltivazione dapprima le terre più fertili e man mano passino a coltivare le terre meno fertili. In un dato istante di tempo l'ultima terra che è stata messa a coltivazione è dunque la meno fertile rispetto a quelle già messe a coltivazione. Su quest'ultima terra (detta terra "marginale") non si paga rendita, in quanto si suppone siano disponibili altri appezzamenti di terra, di uguale fertilità, utilizzabili in alternativa. I proprietari delle altre terre già messe a coltivazione pos-

[1] Si noti la differenza con la nozione di rendimenti *marginali* di un fattore: questi ultimi si manifestano quando si ammette che possa variare un solo fattore di produzione alla volta, fermi restando tutti gli altri: la "produttività marginale" di ciascun fattore di produzione così ottenuta servirà da base per determinare la remunerazione del fattore stesso nella teoria "marginalista". La situazione considerata in questo capitolo è diversa: al variare del numero dei lavoratori impiegati varia anche la quantità (e la qualità) di terra coltivata.

sono però chiedere ai capitalisti un compenso in cambio della possibilità di coltivare sulle loro terre; l'alternativa per questi ultimi sarebbe infatti quella di organizzare il processo produttivo su terre di qualità uguale o inferiore a quella della terra marginale. Tale compenso costituisce appunto la rendita, e per ciascuna unità di terra può al massimo essere pari alla differenza fra il grano ivi ottenuto e il grano producibile sulla terra marginale, che è dato da $f'(N)$. A livello di tutto il sistema le rendite sono pertanto costituite dalla differenza fra il prodotto totale di grano, $f(N)$, e il grano prodotto da tutto il sistema se tutte le terre fossero della qualità della terra marginale, $Nf'(N)$:

$$R = f(N) - Nf'(N). \tag{3.1b}$$

• *Salari.* I salari si suppone che siano fissati al livello della sussistenza dei lavoratori, in base al principio malthusiano secondo cui salari superiori porterebbero a un aumento della popolazione con conseguente riduzione del salario e viceversa. Pertanto il salario unitario, x, va considerato fissato al livello di sussistenza, $\bar{x}$:

$$x = \bar{x}. \tag{3.1c}$$

I salari totali invece sono dati da:

$$W = xN. \tag{3.1d}$$

• *Profitti.* La funzione dei capitalisti di organizzare il processo produttivo si esplica in questa economia semplificata nella "anticipazione" di una quantità di grano ai lavoratori impiegati per "mantenerli" durante il ciclo produttivo, prima che il nuovo grano prodotto si renda disponibile. Pertanto il capitale dell'economia coincide con l'ammontare dei salari totali:[2]

$$K = W; \tag{3.1e}$$

[2] Per semplicità, in questo modello, astraiamo da qualsiasi altra forma di capitale, come ad esempio il grano utilizzato come semente o un qualunque attrezzo che "assiste" i lavoratori nella produzione.

inoltre si suppone che la quantità di grano di cui i capitalisti dispongono come capitale all'inizio di un periodo produttivo sia data:

$$K = \bar{K}. \tag{3.1f}$$

I profitti sono costituiti *da ciò che rimane* ai capitalisti del grano prodotto, una volta che siano state dedotte le rendite e i salari, le cui determinazioni sono state appena analizzate:

$$P = Q - R - W. \tag{3.1g}$$

I profitti vengono cioè determinati in via *residuale* attraverso il metodo del sovrappiù.

Abbiamo così un modello costituito da 7 equazioni in 7 incognite: Q, N, R, x, W, K e P. Combinando la (3.1e) e la (3.1f) si ottiene $W = \bar{K} =: W^*$;[3] sostituendo tale valore di equilibrio dei salari nella (3.1d) e grazie alla (3.1c) si ottiene $N = W^*/\bar{x} =: N^*$. Sostituendo tale valore di equilibrio dei lavoratori impiegati nella (3.1a) si ottiene $Q = f(N^*) =: Q^*$; sostituendo N^* nella (3.1b) si ottiene $R = f(N^*) - N^* f'(N^*) =: R^*$; dalla (3.1g) si ottiene da ultimo

$$P = Q^* - R^* - W^* =: P^*. \tag{3.1g$'$}$$

Possiamo inoltre calcolare il saggio di profitto dell'economia: esso è dato da $\pi = P^*/\bar{K} = \{f(N^*) - [f(N^*) - N^* f'(N^*)] - N^*\bar{x}\}/(N^*\bar{x})$, cioè, semplificando,

$$\pi = \frac{f'(N) - \bar{x}}{\bar{x}} =: \pi^*. \tag{3.2}$$

Si osservi come la teoria della distribuzione del reddito contenuta nel semplice modello analizzato sia determinata in maniera coerente: in particolare l'equazione che determina i profitti, attraverso un'equazione del sovrappiù come la (3.1g$'$), ammette una soluzione univoca, in quanto tutte le grandezze che determinano i profitti sono note *prima* della loro determinazione. Inoltre l'equazione (3.1g) evidenzia l'esistenza di un

[3]In tutto il presente lavoro si seguirà la convenzione di denotare con un asterisco il valore assunto dalla variabile endogena di un modello in corrispondenza della soluzione.

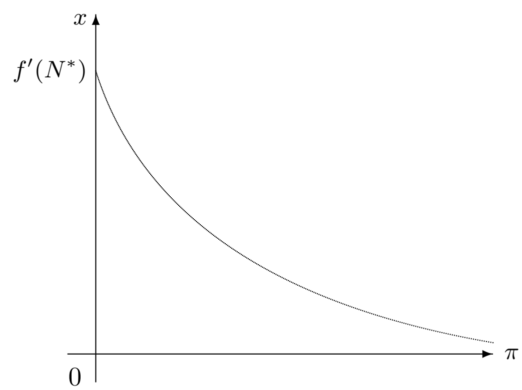


Figura 3.1: Rappresentazione della relazione fra salario unitario e saggio di profitto

legame inverso, di un *trade-off*, tra profitti e salari o tra profitti e rendite. Ancor più se ci distacchiamo dall'ipotesi malthusiana di salari determinati al livello della sussistenza e consideriamo il salario unitario x libero di variare in maniera indipendente[4] l'equazione (3.2) descrive una relazione monotonica e inversa fra il saggio di profitto e il salario unitario: una trasparente prova dell'impossibilità di determinare una variabile distributiva indipendentemente dalle altre o—da un altro punto di vista—una prova della presenza di interessi contrastanti (di un "conflitto fra le classi" nella terminologia marxista) fra lavoratori e capitalisti nella ripartizione del prodotto dell'economia (caratteristica questa che sarà enfatizzata ampiamente dall'analisi marxiana).

Questi due elementi (la possibilità di determinare le variabili distributive senza ragionare "in circolo" e l'esistenza di legami inversi fra una qualsiasi coppia di variabili distributive, ferma restando la terza) descrivono la struttura analitica della teoria ricardiana della distribuzione: come accennato nel precedente capitolo 2 essi non sembrano essere

[4]Ciò non significa considerare il salario reale unitario come una variabile indipendente; semplicemente si lascia aperta la determinazione del salario a qualche altro principio esogeno al modello qui considerato.

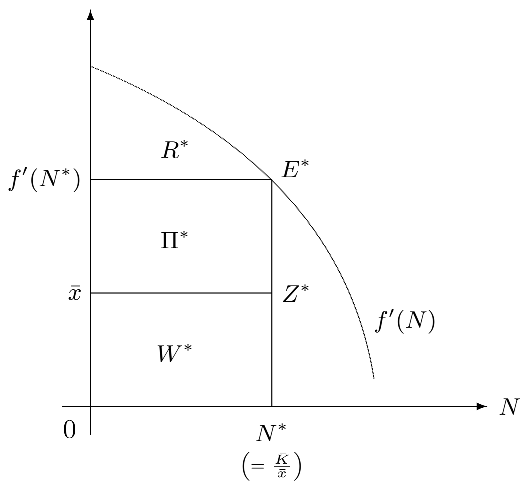


Figura 3.2: Rappresentazione del sistema ricardiano a un settore

soddisfatti pienamente dall'analisi di Smith.

È possibile, da ultimo, dare una rappresentazione dell'"equilibrio naturale" ricardiano attraverso il grafico della figura 3.2. Sull'asse delle ascisse è indicato il numero dei lavoratori impiegati in equilibrio, N^*; i salari, dati da $\bar{x}N^*$, sono indicati dall'area del rettangolo $0N^*Z^*\bar{x}$; la produzione totale Q^* è indicata dall'area sottesa alla curva del prodotto marginale nell'intervallo $(0, N^*)$.[5] Le rendite sono date dalla differenza fra tale area e l'area del rettangolo $0N^*E^*f'(N^*)$, che rappresenta la produzione ipotetica dell'economia se tutte le terre avessero fertilità pari a quella della terra marginale. I profitti—essendo il sovrappiù—sono l'area rimanente.

Mediante tale grafico precedente è possibile raffigurare facilmente anche il processo ricardiano di accumulazione del capitale. Secondo Ricardo i proprietari terrieri consumano tutto il loro reddito; i capitalisti,

[5]Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha infatti che per ogni N vale la relazione:

$$f(N) = \int_0^N f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

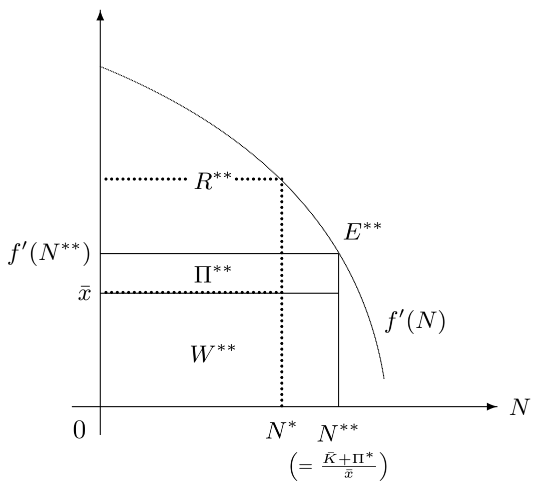


Figura 3.3: Rappresentazione dell'accumulazione (L'equilibrio naturale della figura 3.2 è indicato da lettere denotate con un asterisco e dalle aree tratteggiate)

al contrario, risparmiano tutti i profitti, salvo una piccola parte di essi che viene destinata ai consumi; tali risparmi si traducono in un maggior ammontare di capitale disponibile all'inizio del periodo di produzione successivo: verrà così impiegato un numero di lavoratori superiore a quello del periodo precedente: la figura 3.3 evidenzia come questo processo di accumulazione del capitale dia luogo a un nuovo equilibrio naturale nel quale:[6] i) i salari sono aumentati in proporzione al numero dei nuovi lavoratori impiegati; ii) le rendite sono aumentate a causa dell'estensione del margine di coltivazione (si sono cioè messe a coltivazione terre meno fertili rispetto a quelle già impiegate, aumentando così la differenza fra il prodotto ottenuto su ciascuna terra e quello ottenuto sulla terra marginale); iii) i profitti sono diminuiti a causa dell'aumento delle rendite.

Tale processo di accumulazione continuerà, secondo Ricardo, fino a quando ci saranno profitti positivi (o fino a quando saranno diventati

[6]Le variabili denotate con un solo asterisco si riferiscono all'equilibrio naturale descritto nella figura 3.2; quelle con due asterischi al nuovo equilibrio naturale.

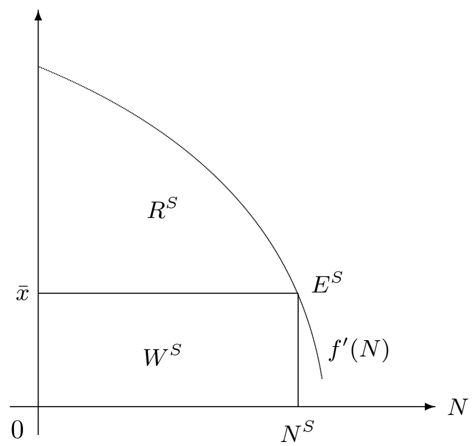


Figura 3.4: Rappresentazione dell'equilibrio stazionario

così basso da non invogliare più i capitalisti ad accumulare); tuttavia si vede che, man mano che tali profitti vengono accumulati, il saggio di profitto e di conseguenza la crescita del sistema, tendono a ridursi, fino ad annullarsi: ci troviamo così in quello che Ricardo chiama *equilibrio stazionario*, denotato dal punto E^S nella figura 3.4. Verso tale configurazione converge prima o poi il sistema capitalistico secondo Ricardo. Il progresso tecnologico, il cui effetto sui grafici precedenti si manifesta attraverso uno spostamento verso l'alto e verso destra della funzione di produzione, ha, secondo Ricardo, solo l'effetto di ritardare la convergenza all'equilibrio stazionario, un destino inevitabile delle economie capitalistiche. Una visione, dunque, in ultima analisi pessimistica delle possibilità di crescita del sistema economico, che ritroveremo poi accentuata in Marx il quale formulerà una conclusione analoga nella sua "legge" della caduta tendenziale del saggio di profitto.

1.2 Estensione a due industrie: capitale costituito solo da grano

Le precedenti conclusioni possono essere facilmente estese e generalizzate al caso di produzione di due merci nel caso in cui il capitale del sistema sia ancora costituito solo dal grano anticipato ai lavoratori come salari. Questa estensione riprende lo schema analitico proposto da Ricardo in (1815), formulato poi in termini matematici da Pasinetti (1960). Consideriamo un sistema economico nel quale oltre all'industria del grano, così come è stata descritta nel paragrafo precedente, esiste anche un'industria che produce una seconda merce, diciamo l'oro, Supponiamo, per semplicità, che anche nella seconda industria l'unico fattore di produzione sia rappresentato dalla forza lavoro, cosicché il capitale del sistema sia costituito solo dal grano anticipato ai lavoratori all'inizio del periodo di produzione. Supponiamo inoltre che la produzione di oro venga condotta in regime di rendimenti di scala costanti. Riprendiamo le equazioni (3.1a)-(3.1g) indicando le variabili che si riferiscono all'industria del grano e dell'oro con gli indici g e o rispettivamente (le variabili senza indice si riferiscono all'intero sistema).

$$Q_g = f(N_g) \tag{3.3a}$$

dove

$$f(N_g) \geq 0, \qquad \text{(I.1)}$$
$$f'(N_g) > 0, \qquad \text{(I.2)}$$
$$f''(N_g) < 0, \qquad \text{(I.3)}$$
$$f'(1) \geq \bar{x}, \qquad \text{(I.4)}$$

$$R = f(N_g) - N_g f'(N_g), \tag{3.3b}$$

$$x = \bar{x}, \tag{3.3c}$$

$$W = x(N_g + N_o), \tag{3.3d}$$

$$K = W, \tag{3.3e}$$

$$K = \bar{K}, \tag{3.3f}$$

$$P_g = Q_g - R - xN_g, \tag{3.3g}$$

La produzione di oro sarà descritta dalla seguente funzione di produzione,

$$Q_o = \alpha N_o. \tag{3.3h}$$

Dati i rendimenti di scala costanti nella produzione di oro non si formeranno rendite in questa industria (ciò spiega anche perché l'equazione delle rendite è rimasta invariata). I profitti di questa industria saranno calcolabili deducendo dai ricavi soltanto i salari; vi è tuttavia ora una differenza significativa rispetto all'equazione (3.3g) dei profitti dell'industria del grano: la merce prodotta (oro) è diversa dalla merce impiegata (grano per mantenere i lavoratori); affinché esse siano commensurabili nell'equazione dei profitti dell'industria dell'oro esse devono essere espresse *in valore*:

$$P_o = p_o Q_o - p_g x N_o, \tag{3.3i}$$

dove p_g e p_o indicano, rispettivamente, il prezzo del grano e dell'oro. Diventa così necessario dire cosa determina i prezzi ora introdotti; in altri termini diventa necessario formulare una *teoria del valore*. Seguendo il ragionamento espresso da Ricardo nel *Saggio sui profitti* (1815) e seguendo l'interpretazione data da Sraffa in (1951) osserviamo come le condizioni di produzione dell'industria del grano siano in grado da sole di determinare il saggio di profitto di questa industria:

$$\pi_g \equiv \frac{P_g}{\bar{x}N_g} = \frac{Q_g - R - \bar{x}N_g}{\bar{x}N_g} = \frac{f'(N_g) - \bar{x}}{\bar{x}}. \tag{3.3g$'$}$$

In tale industria i profitti e, di conseguenza, il saggio di profitto sono determinati in termini *fisici*, cioè facendo riferimento a quantità della stessa merce (il grano) e dunque in maniera indipendente dai prezzi. Per effetto della concorrenza capitalistica, che opera attraverso il processo di *mobilità interindustriale dei capitali*, il saggio di profitto dell'industria dell'oro dovrà livellarsi, nel lungo periodo, al saggio di profitto dell'industria del grano, il quale risulta già determinato prima di conoscere il sistema dei prezzi. I prezzi di grano e oro dovranno perciò modificarsi in modo tale che i ricavi e i costi dell'industria del oro, rispettivamente $p_o Q_o$ e $p_g x N_o$, diano luogo a un saggio di profitto pari a quello dell'industria del grano. Nel lungo periodo dovrà dunque valere la relazione

$$\pi_o \equiv \frac{p_o Q_o - p_g x N_o}{p_g x N_o} = \frac{f'(N_g) - \bar{x}}{\bar{x}} \equiv \pi_g. \tag{3.3j}$$

Rielaborando la (3.3j) si ottiene la relazione

$$\frac{p_g}{p_o} = \frac{1/f'(N_g)}{1/\alpha}. \tag{3.3j$'$}$$

La condizione di uniformità dei saggi di profitto, (3.3j) (o (3.3j′), determina così i prezzi relativi del sistema. È possibile riconoscere il tipo di teoria del valore implicato dalla (3.3j′). Conviene partire dal denominatore: α è la quantità di oro prodotta da un lavoratore; $1/\alpha =: \ell_o$ è la quantità di lavoro necessaria a produrre 1 unità di oro. Analogamente $f'(N_g)$ è la quantità di grano prodotta da un lavoratore sulla terra marginale,[7] mentre $1/f'(N_g) =: \ell_g$ è la quantità di lavoro necessaria a produrre una unità di grano sulla terra marginale. Vale dunque la *teoria del valore-lavoro*:

$$\frac{p_g}{p_o} = \frac{\ell_g}{\ell_o}.$$

Il modello è costituito da 10 equazioni (3.3a)–(3.3j) in 12 incognite, Q_g, N_g, R, x, W, K, P_g, Q_o, N_o, P_o, p_g e p_o. Per chiuderlo sono necessarie ancora due equazioni. La prima è facilmente indentificabile nella fissazione del numerario. Seguendo Pasinetti definiamo come unità di valore la quantità di oro prodotta da un lavoratore, che è pari ad α; poniamo cioè

$$p_o\alpha = 1 \tag{3.3k}$$

(in tal modo il prezzo di una unità di oro sarà $p_o = 1/\alpha$: non solo esso è proporzionale ma *coincide* con la quantità di lavoro in esso contenuta; lo stesso può essere detto del prezzo di una unità di grano, che sarà $p_g = 1/f'(N_g)$.)

Per chiudere il modello bisogna introdurre una relazione che determini le quantità da produrre dei due beni. Su questo punto Pasinetti segue Ricardo, secondo il quale i lavoratori e i capitalisti spendono tutti i loro redditi, rispettivamente salari e profitti, per acquistare la merce di prima necessità (il grano), i primi nella forma di consumi finali per mantenersi, i secondi nella forma di investimenti netti per espandere l'attività

[7] Mentre per l'industria dell'oro, grazie ai rendimenti di scala costanti, ciascun lavoratore produce la stessa quantità di oro, nell'industria del grano ciascun lavoratore produce una quantità di grano diversa a seconda della terra sulla quale è impiegato.

produttiva (per assumere più lavoratori). I proprietari terrieri invece, spendono la totalità dei loro redditi (rendite) per l'acquisto della merce di lusso (oro)—salvo una piccola quota di esse, che per semplicità trascureremo, che viene spesa nell'acquisto della merce di prima necessità. Tutto ciò può essere espresso attraverso la seguente equazione,

$$p_o Q_o = p_g R. \tag{3.3l}$$

Tale equazione, che afferma che tutte le rendite sono spese nell'acquisto di oro, afferma implicitamente anche che salari e profitti sono spesi nell'acquisto di grano.[8] Il modello a questo punto è determinato. Si può dimostrare che sotto le ipotesi introdotte esso ammette un'unica soluzione economicamente significativa e stabile (cfr. Pasinetti (1960, Appendice)).[9]

Va sottolineata, da ultimo, la natura asimmetrica che hanno le due

---

[8]Considerando che nel lungo periodo $\pi_g = \pi_o = \pi$, dalle (3.3j) si ottiene:

$$N_g f'(N_g) = x N_g (1+\pi) \quad \text{e} \quad p_o Q_o = p_g x N_o (1+\pi);$$

moltiplicando ambo i membri della prima equazione per p_g e sommando le due equazioni si ottiene:

$$p_g N_g f'(N_g) + p_o Q_o = p_g x (N_g + N_o)(1+\pi);$$

sostituendo a $N_g f'(N_g)$ l'espressione ottenibile dalla (3.3b), grazie alle (3.3a), (3.3d) e (3.3e) e tenendo conto della (3.3l) si ottiene

$$p_g Q_g = p_g W + \pi p_g K,$$

che esprime, appunto, che salari e profitti sono spesi nell'acquisto di grano.

[9]Un'obiezione che potrebbe essere fatta a questo modello è che in esso la determinazione del saggio di profitto del settore del grano, e quindi del saggio di profitto dell'intero sistema economico, non è ottenibile solo a partire da grandezze fisiche, ma richiede la soluzione dell'intero modello: osservando infatti l'espressione (3.3g′) si vede che π_g, e quindi π, dipende da N_g, che non è una variabile nota finché non si risolve tutto il modello. Si perde così l'idea ricardiana che il saggio di profitto del settore del grano regoli il saggio di profitto dell'intero sistema economico e che esso sia calcolabile prima della determinazione dei prezzi. Una possibile soluzione a questo problema potrebbe essere quello di considerare le quantità prodotte delle due merci Q_g e Q_o come *date*. (Circa la metodologia degli economisti classici di considerare come date le quantità prodotte nella fase di determinazione delle variabili distributive e dei prezzi si veda, ad esempio, Garegnani (1983) e (1984).) In tal caso

merci, grano e oro, all'interno del sistema economico considerato. Le condizioni di produzione del grano hanno un ruolo preponderante in quanto concorrono da sole a determinare le variabili rilevanti del sistema economico nel suo insieme e, in particolare, le rendite e il saggio di profitto dell'intero sistema. Le condizioni di produzione dell'oro hanno invece un ruolo secondario: l'unica influenza che essi esercitano è nella determinazione del prezzo relativo dell'oro in termini di grano, per far sì che il saggio di profitto realizzato nella produzione di oro si livelli al saggio di profitto dell'intero sistema economico. Se per esempio si verificasse un'innovazione tecnologica nel settore dell'oro (un aumento del parametro α) il saggio di profitto dell'intero sistema rimarrebbe invariato; si ridurrebbe soltanto il prezzo dell'oro in termini di grano. Se invece l'innovazione si verificasse nel settore del grano (un aumento di $f'(N_g)$) aumenterebbe il saggio di profitto dell'intero sistema, si ridurrebbero le rendite e il prezzo del grano in termini di oro. Analoghi effetti asimmetrici si avrebbero nel caso di una tassazione di una produzione piuttosto che dell'altra. Paradossalmente se per una qualunque ragione si dovesse interrompere la produzione di oro, l'industria del grano potrebbe continuare a funzionare regolarmente; se invece si dovesse interrompere la produzione di grano l'intero sistema verrebbe a bloccarsi, in quanto il grano è il mezzo di produzione di entrambe le merci. Questa asimmetria è dovuta al fatto che in questo schema il grano svolge, oltre al ruolo di bene di consumo, anche quello di fattore di produzione di *entrambi* i beni; l'oro svolge solo quello di bene di consumo. Nella terminologia introdotta da Ricardo il grano è un *bene di prima necessità*; l'oro è un *bene di lusso*.

---

basterebbe sostituire le equazioni (3.3f) e (3.3l) con le due equazioni seguenti:

$$Q_g = \bar{Q}_g \qquad Q_o = \bar{Q}_o.$$

Attraverso la (3.3a) risulterebbe determinato $N_g^* = f^{-1}(\bar{Q}_g)$ che, sostituito nella (3.3g$'$) permetterebbe di conoscere il saggio di profitto dell'intero sistema economico senza dover risolvere le altre equazioni:

$$\pi = \frac{f'(N_g^*) - \bar{x}}{\bar{x}}.$$

2 Generalizzazione. Aspetti problematici

Nella sezione precedente si è visto come le nitide conclusioni circa la distribuzione del reddito ottenute nello schema con una sola merce sono state direttamente estese a un sistema con due merci. Tutto ciò è strettamente legato alla supposizione che nell'economia considerata ci sia una sola merce (il grano) usata come bene capitale. Grazie a ciò si instaura nel modello una serie di relazioni *causali* tra le variabili, che è stata messa in luce nel procedimento con cui si sono ottenute le soluzioni per lo schema a una sola merce: dati il salario di sussistenza e la dotazione di capitale dell'economia si determinano i salari totali; da questi la popolazione impiegata, poi la quantità totale di grano prodotta, poi le rendite e, da ultimo, i profitti. In particolare si vede come i profitti e il saggio di profitto possono essere calcolati come *residuo* solo *dopo* che il prodotto totale dell'economia (al netto delle rendite) e il salario di sussistenza siano conosciuti.[10] Il fatto che in tale sistema ci sia una sola merce o due merci, non fa grande differenza, a condizione che solo una di esse sia usata come bene capitale. Nel caso di due merci sarà necessario introdurre una teoria del valore per valutare le due merci, ma le grandezze distributive fondamentali (rendite, salari e profitti) sono tutte conoscibili indipendentemente dai prezzi. Non si pongono in questo modo problemi di circolarità logica nella determinazione delle variabili distributive e si può osservare, inoltre, un legame inverso tra tra salari e profitti, una volta date le rendite.

Nel momento in cui si introduce una seconda merce utilizzata come bene capitale si può vedere immediatamente che questi due risultati vengono meno.

Per capire ciò generalizziamo l'equazione dei profitti e del saggio di profitto al caso di un'economia con M merci che possono anche essere usate come beni capitale. Per rendere il discorso più semplice astraiamo dalla presenza delle rendite e concentriamoci solo su salari e profitti.

[10] Questa *causalità*, che caratterizza parecchi aspetti della teoria ricardiana e dell'economia politica classica in generale, riflette l'esigenza da parte degli economisti classici di poter "controllare" la correttezza dei ragionamenti proposti, in una fase in cui non si era ancora diffuso tra gli economisti l'utilizzo della matematica, che avrebbe permesso di trattare anche i legami di interdipendenza tra le variabili.

Pertanto profitti e saggio di profitto sono dati dalle seguenti espressioni:

$$P = (Q - K) - W \quad \text{e} \quad \pi = \frac{(Q - K) + W}{K + W}, \tag{3.4}$$

dove Q indica il prodotto lordo dell'economia, K i mezzi di produzione impiegati nel processo produttivo e W i salari. Data l'eterogeneità delle merci le grandezze Q, K e W vanno espresse in termini di *valore* (non più in termini fisici); ciascuna di essa va pensata cioè come una somma di quantità di merci eterogenee, moltiplicate per i rispettivi prezzi: $Q = \sum_{m=1}^{M} p_m q_m$, $K = \sum_{m=1}^{M} p_m k_m$ e $W = \sum_{m=1}^{M} p_m \bar{x}_m N_m$, dove q_m indica la quantità totale prodotta di merce m, k_m indica la quantità di merce m usata in tutto il sistema come bene capitale (escluse le sussistenze), $\bar{x}_m$ indica il consumo di sussistenza di merce m di ciascun lavoratore e N_m la quantità di lavoratori impiegati nel nella produzione di merce m. Si instaura a questo punto la necessità di elaborare una teoria per la determinazione dei prezzi, cioè una teoria del valore. Per evitare i problemi logici a cui era andato incontro Smith, che sono stati richiamati nel capitolo 2, Ricardo nei *Principi di economia politica* (1817) cerca di recuperare la teoria del valore lavoro emersa come risultato dall'analisi condotta nel *Saggio sui profitti* (1815) ripreso nella sezione precedente. Più precisamente egli *ipotizza* che i prezzi relativi delle merci siano proporzionali alle quantità di lavoro in esse incorporato, cioè che

$$p_m/p_\mu = \ell_m/\ell_\mu, \tag{3.5}$$

cosicché, una volta scelto come numerario la generica merce μ, il prezzo della generica merce m espressa in termini di μ è dato dall'espressione

$$p_m = \frac{\ell_m}{\ell_\mu} \qquad m = 1, \ldots, M.$$

Tenendo conto di ciò l'equazione dei profitti e del saggio di profitto diventano:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{m=1}^{M} \frac{\ell_m}{\ell_\mu}(q_m - k_m) - \frac{\ell_m}{\ell_\mu}\bar{x}_m N_m \quad \text{e} \\ \pi &= \frac{\sum \ell_m(q_m - k_m) - \sum \ell_m \bar{x}_m N_m}{\sum \ell_m k_m + \sum \ell_m \bar{x}_m N_m}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Le espressioni (3.6) così ottenute per i profitti e per il saggio di profitto sono analiticamente rigorose: tutte le grandezze a secondo membro di ciascuna di esse sono note *prima* di conoscere i profitti o il saggio di profitto (sono infatti quantità fisiche di lavoro o di merci). Inoltre possiamo osservare che se una qualunque delle quantità di merci consumate come sussistenze dai lavoratori, $\bar{x}_m$, dovesse aumentare, ferme restando le altre, i profitti e il saggio di profitto devono necessariamente diminuire. Riappare così il *trade-off* tra salari e profitti che si era evidenziato in un'economia dove si produce grano mediante grano, ma in questo caso si riferisce a un'economia con più merci.

Si può osservare, però, che la univocità dei risultati così ottenuti è strettamente legata all'ipotesi che i prezzi relativi delle merci siano proporzionali alle quantità di lavoro in esse incorporato. Tale ipotesi potrebbe essere accettabile, ad esempio, nel caso in cui tutte le merci fossero prodotte solo con il lavoro, in modo che, anche astraendo dalle rendite come stiamo facendo in questa sezione, il prezzo naturale di ciascuna merce sarebbe dato da:

$$p_m = w\ell_m(1+\pi), \qquad m = 1, \ldots, M,$$

dove w indica il salario monetario (nella simbologia prima introdotta $w = \sum_{m=1}^{M} p_m \bar{x}_m$). Si noti che in tal caso il prezzo naturale di ciascuna merce m è riconducibile a salari ($w\ell_m$) e profitti ($\pi w \ell_m$)—l'unica forma di capitale essendo costituita dall'anticipazione dei beni salario ai lavoratori all'inizio del periodo di produzione. Tuttavia i prezzi relativi delle merci sono ancora determinati dal rapporto tra le quantità di lavoro incorporato in esse; vale cioè la formula (3.5). In tal caso, pertanto, profitti e saggio di profitto sono determinabili con il metodo del sovrappiù e sono inversamente legati ai salari reali.

Basta però scostarsi anche di poco dal tipo di tecnologia di produzione delle merci appena considerato che riappare l'interdipendenza distribuzione-prezzi che si è appena riusciti a eliminare. Supponiamo, per esempio, che nel sistema economico in esame, per produrre ciascuna merce sia necessario impiegare il lavoro in due distinti periodi di tempo: più precisamente per ottenere una unità di merce m al tempo $t = 0$ è necessario impiegare, oltre alla quantità di lavoro ℓ_m per il periodo fra

$t = -1$ e $t = 0$, che potremmo chiamare "lavoro diretto", anche una quantità di lavoro ℓ'_m per l'intervallo di tempo tra $t = -2$ e $t = -1$ (si veda la figura 3.5): ℓ'_m può essere visto come il "lavoro indiretto", neces-

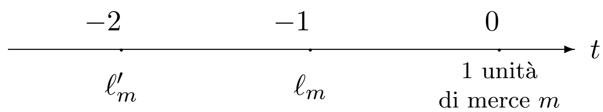


Figura 3.5: Successione temporale degli input di lavoro

sario, per esempio, a produrre gli attrezzi, da usarsi poi nell'intervallo $(-1, 0)$, assieme al lavoro diretto per produrre il bene.

In questo caso l'equazione del prezzo della merce m diventa:

$$p_m = w(1+\pi)\ell_m + w(1+\pi)^2\ell'_m. \tag{3.7}$$

Non vale più così la teoria del valore-lavoro: il prezzo relativo della generica merce m espresso in termini della merce μ non dipende solo dalle quantità di lavoro ma anche dal saggio di profitto:

$$\frac{p_m}{p_\mu} = \frac{\ell_m + (1+\pi)\ell'_m}{\ell_\mu + (1+\pi)\ell'_\mu}. \tag{3.7$'$}$$

Analogamente a quanto visto prima la presenza dei prezzi naturali (3.7) nelle equazioni dei profitti e del saggio di profitto non permetterebbe di determinare queste grandezze senza la previa conoscenza del saggio di profitto. Si ripresenta così il problema di circolarità logica che gravava sulla costruzione smithiana.

Ricardo ha tentato di superare questa critica ricorrendo a un secondo caso particolare, nel quale si ipotizza che rapporto tra il lavoro indiretto e il lavoro diretto sia lo stesso per tutti i settori. Più precisamente sia

$$\kappa_m := \frac{\ell'_m}{\ell_m};$$

κ_m indica il rapporto fra lavoro indiretto (il lavoro necessario per predisporre gli attrezzi necessari alla produzione, nell'esempio di prima) e il lavoro diretto; potremmo considerare κ_m un indicatore dell'"intensità capitalistica" della tecnica di produzione della merce m. Se si suppone che

$$\kappa_m = \kappa, \quad m = 1, \dots, M, \tag{3.8}$$

cioè che l'intensità capitalistica sia uniforme per tutte le industrie, le equazioni dei prezzi (3.7) diventano:

$$p_m = w(1+\pi)[1+\kappa(1+\pi)]\ell_m. \tag{3.9}$$

In questo caso i prezzi relativi sarebbero ancora determinati unicamente dalle quantità di lavoro, in quanto

$$\frac{p_m}{p_\mu} = \frac{w(1+\pi)[1+\kappa(1+\pi)]\ell_m}{w(1+\pi)[1+\kappa(1+\pi)]\ell_\mu} = \frac{\ell_m}{\ell_\mu};$$

sarebbe ancora valida, cioè, la teoria del valore-lavoro. Sostituendo le (3.9) nelle equazioni dei profitti e del saggio di profitto si ottengono espressioni equivalenti alle (3.6). Si riescono così a determinare coerentemente i profitti e il saggio di profitto e a dimostrare l'esistenza di un *trade-off* tra salario reale e saggio di profitto. Ma questi risultati dipendono crucialmente dall'ipotesi di uniformità dell'intensità capitalistica fra i settori (equazione 3.8). Tale ipotesi non è però plausibile dal punto di vista economico.

Di fronte a questa ulteriore critica Ricardo ha da ultimo cercato di reagire sostenendo che la teoria del valore-lavoro, per quanto non valida in generale, può fornire una buona approssimazione del prezzo relativo delle merci. Soltanto che questa affermazione apre un ulteriore problema di natura non diversa da quelli dai quali ci si vuole liberare. Infatti, per affermare che il rapporto tra le quantità di lavoro costituisce una buona approssimazione del "vero" prezzo relativo delle merci bisogna anche saper valutare il grado di tale approssimazione di tale affermazione. Come si è già avuto modo di dire il rapporto fra p_m e p_μ è funzione di π;[11]

[11] Nel caso esaminato con l'equazione (3.7′) il legame fra p_m/p_μ e π è espresso da un'iperbole equilatera; come avremo modo di vedere nel capitolo 8, generalizzando ulteriormente la tecnologia (per esempio considerando l'impiego di quantità di lavoro anche precedentemente a $t = -2$), il legame tra p_m/p_μ e π diviene più analiticamente complicato, come ad esempio quello indicato nella figura 3.6.

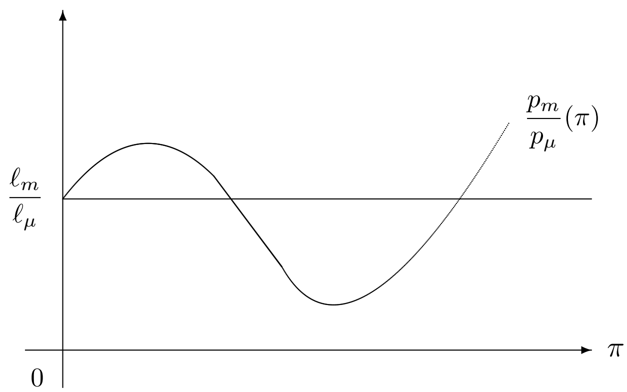


Figura 3.6: Andamento di p_m/p_μ al variare di π

infatti $\frac{p_m}{p_\mu}(0) = \frac{\ell_m}{\ell_\mu}$, ma non appena π si discosta da 0 allora $\frac{p_m}{p_\mu}(\pi) \neq \frac{\ell_m}{\ell_\mu}$. L'approssimazione che si compie usando ℓ_m/ℓ_μ anziché p_m/p_μ è raffigurata dalla distanza fra la retta orizzontale di ascissa ℓ_m/ℓ_μ e la curva $\frac{p_m}{p_\mu}(\pi)$. Quindi a causa del fatto che il prezzo di una merce deve essere necessariamente espresso nei termini di un'altra, nel momento in cui ci si scosta da $\pi = 0$, dove p_m/p_μ ed ℓ_m/ℓ_μ coincidono, non si può dire se il fatto che p_m/p_μ sia diventato maggiore di ℓ_m/ℓ_μ sia dovuto a un *rincaro* di m in termini di μ o a un *ribasso* di μ in termini di m; e, analogamente, non si può dire se il fatto che p_m/p_μ sia diventato minore di ℓ_m/ℓ_μ sia dovuto a un *ribasso* di m in termini di μ o a un *rincaro* di μ in termini di m. Per eliminare tale ambiguità sarebbe necessario usare come numerario una merce il cui valore non avesse la necessità di variare relativamente a quello delle altre merci quando varia il saggio di profitto; in questo caso le variazioni del rapporto p_m/p_μ sarebbero da attribuire *esclusivamente* a variazioni del valore della merce m. Una merce con tali caratteristiche costituirebbe, per usare la terminologia di Ricardo, una "misura invariabile del valore".[12]

[12] Le seguenti citazioni dai *Principi* di Ricardo mostrano come egli fosse ampiamente cosciente del problema.

> Two commodities vary in relative value, and we wish to know in

which the variation has really taken place. If we compare the present value of one, with shoes, stockings, hats, iron, sugar, and all other commodities, we find that it will exchange for precisely the same quantity of all these things as before. If we compare the other with the same commodities, we find it has varied with respect to them all: we may then with great probability infer that the variation has been in this commodity, and not in the commodities with which we have compared it. If on examining still more particularly into all the circumstances connected with the production of these various commodities, we find that precisely the same quantity of labour and capital are necessary to the production of the shoes, stockings, hats, iron, sugar, &c.; but that the same quantity as before is not necessary to produce the single commodity whose relative value is altered, probability is changed into certainty, and we are sure that the variation is in the single commodity: we then discover also the cause of its variation (Ricardo (1817, pp. 17–18)).

When commodities varied in relative value, it would be desirable to have the means of ascertaining which of them fell and which rose in real value, and this could be effected only by comparing them one after another with some invariable standard measure of value, which should itself be subject to none of the fluctuations to which other commodities are exposed. Of such a measure it is impossible to be possessed, because there is no commodity which is not itself exposed to the same variations as the things, the value of which is to be ascertained; that is, there is none which is not subject to require more or less labour for its production (Ricardo (1817, pp. 43–44)).

But if this cause of variation in the value of a medium could be removed—if it were possible that in the production of our money for instance, the same quantity of labour should at all time be required, still it would not be a perfect standard or invariable measure of value, because, as I have already endeavoured to explain, it would be subject to relative variations from a rise or fall of wages, on account of the different proportions of fixed capital which might be necessary to produce it, and to produce those other commodities whose alteration of value we wished to ascertain (Ricardo (1817, p. 44)).

If, then, I may suppose myself to be possessed of a standard so nearly approaching to an invariable one, the advantage is, that I shall be enabled to speak of the variations of other things, without embarrassing myself on every occasion with the consideration of the possible alteration in the value of the medium in which price and value are estimated (Ricardo (1817, p. 46)).

Ricardo non fu però in grado di individuare una merce numerario con tale proprietà di invarianza. Rimane così incompiuto anche il tentativo di sostenere che la teoria del valore-lavoro costituisce una buona approssimazione della realtà, in quanto la mancanza di una misura invariabile del valore non permette di valutare il grado di approssimazione di tale affermazione. È questo un problema che si aggiunge a quello originario di determinazione dei profitti e del saggio di profitto col metodo del sovrappiù.

Tali conclusioni hanno finito col convincere gli economisti del tempo di Ricardo che sia impossibile fondare una teoria rigorosa dei profitti basata sulla nozione di sovrappiù.

Capitolo 4

Teoria del valore e dei prezzi in Marx

1 Introduzione e definizioni

La teoria del valore gioca un ruolo fondamentale nella teoria economica di Marx, in quanto essa sta alla base della spiegazione della natura del profitto, il quale, a sua volta, viene considerato originato dallo *sfruttamento* dei lavoratori presente nelle economie capitalistiche.

Marx (1867-86-94) riprende la teoria del valore lavoro già vista in Ricardo, seppur con alcune importanti qualificazioni. Il valore di una merce per Marx è, *per definizione*, la quantità di lavoro "socialmente necessaria" per la sua produzione.

Una importante distinzione che troviamo in Marx è la distinzione tra *valore d'uso* e *valore di scambio* del lavoro, o meglio, la distinzione tra *lavoro* e *forza lavoro*. Il lavoro umano ha la caratteristica di produrre merci in quantità *superiori* a quelle che sono necessarie a produrre i mezzi di sussistenza necessari per riprodurre (per rigenerare) la forza lavoro. La concorrenza capitalistica conduce, secondo Marx, i prezzi delle merci al loro costo di produzione. In una società capitalistica anche il lavoro, secondo Marx, è considerato una merce come tutte le altre, e pertanto verrà scambiato al suo costo di (ri-)produzione, cioè al salario di sussistenza. La sussistenza dei lavoratori è dunque il *valore di scambio del lavoro*. Ma il lavoro erogato dal lavoratore (*valore d'uso del lavoro*) si è detto che è superiore a quello necessario a produrre le sussistenze. L'eccedenza di ciò che un lavoratore produce su ciò che è strettamente necessario al suo sostentamento, chiamata da Marx *plusvalore*, viene interamente incamerata dai capitalisti. Il plusvalore diventa così la misura dello *sfruttamento*.

Il valore di una merce è costituito, per Marx, dalla somma di tre componenti:

$$c + v + s,$$

dove c è la quantità di lavoro socialmente necessaria a reintegrare il "capitale costante", cioè l'insieme delle macchine e delle merci consumate nel processo produttivo, v la quantità di lavoro socialmente necessaria a reintegrare il "capitale variabile", definito come le sussistenze dei lavoratori e s il "plusvalore", o quella parte di lavoro incorporato nelle merci di cui si appropriano i capitalisti.

Consideriamo un sistema economico nel quale ci siano tre settori, uno che produce i mezzi di produzione, uno che produce le merci salario e il terzo che produce merci di lusso. I "valori" totali, m_i $(i = 1, 2, 3)$, delle produzioni di ciascun settore sono *definiti* dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} m_1 &= c_1 + v_1 + s_1 \\ m_2 &= c_2 + v_2 + s_2 \\ m_3 &= c_3 + v_3 + s_3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

(Supponiamo di normalizzare la quantità totale di merce prodotta da ciascun settore a 1, cosicché i valori m_i sono i valori *unitari* delle varie merci.)

Affinché il sistema sia in grado di riprodursi di anno in anno esattamente uguale a se stesso, senza espandersi né contrarsi (stiamo considerando cioè un sistema stazionario, che Marx chiama "schema di riproduzione semplice") dovranno essere soddisfatte le relazioni:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= c_1 + v_1 + s_1 \\ v_1 + v_2 + v_3 &= c_2 + v_2 + s_2 \\ s_1 + s_2 + s_3 &= c_3 + v_3 + s_3. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Definiamo il saggio di plusvalore, σ_i, col seguente rapporto:

$$\sigma_i = s_i / v_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.3}$$

Secondo Marx σ_i sarà uniforme nei vari settori, in quanto la concorrenza tenderà a uniformare i salari pagati nei vari settori; d'altra parte la giornata lavorativa è uguale in tutti i settori, quindi indicando con L la lunghezza in ore della "giornata lavorativa", con w il salario giornaliero di un lavoratore, ossia la quantità di ore lavoro necessarie a produrre le sussistenze giornaliere di un lavoratore e con N_i il numero degli occupati nel settore i si ha

$$s_i + v_i = LN_i, \quad \text{(ore lavoro } \textit{erogate} \text{ al settore } i \text{ in una giornata)}$$

e

$$v_i = wN_i \quad \text{(ore lavoro } \textit{pagate} \text{ nel settore } i \text{ in una giornata).}$$

Pertanto

$$\sigma_i = \frac{s_i}{v_i} = \frac{s_i + v_i - v_i}{v_i} = \frac{LN_i - wN_i}{wN_i} = \frac{L-w}{w};$$

l'ultima espressione trovata per σ_i è indipendente da i, quindi possiamo scrivere

$$\sigma_i = \sigma, \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.4}$$

(σ viene indifferentemente chiamato saggio di plusvalore o saggio di sfruttamento).

Si possono così riscrivere le (4.1):

$$\begin{aligned} m_1 &= c_1 + v_1(1+\sigma) \\ m_2 &= c_2 + v_2(1+\sigma) \\ m_3 &= c_3 + v_3(1+\sigma). \end{aligned} \tag{4.1$'$}$$

Ma i capitalisti più che il rapporto σ sono interessati al rapporto tra il plusvalore e il capitale *totale*

$$\pi_i = \frac{s_i}{c_i + v_i}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.5}$$

cioè il saggio di profitto.

Definiamo ora "composizione organica del capitale" il rapporto

$$\gamma_i = c_i / v_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.6}$$

Possiamo così ri-esprimere il saggio di profitto:

$$\pi_i = \frac{s_i}{c_i + v_i} = \frac{s_i/v_i}{c_i/v_i + 1} = \frac{\sigma}{1+\gamma_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.5$'$}$$

La concorrenza capitalistica dovrebbe far tendere all'uniformità i saggi di profitto per effetto della mobilità dei capitali alla ricerca del saggio di profitto più elevato. Ma dalla (4.5′) si vede subito che ciò sarà possibile solo se

$$\gamma_i = \gamma, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.7}$$

cioè se la composizione organica del capitale è uniforme nei vari settori. In caso contrario *se* le merci fossero scambiate ai valori non potrebbe realizzarsi l'uniformità dei saggi di profitto.

Secondo Marx la concorrenza tra i capitalisti tenderà a realizzare comunque l'uniformità dei saggi di profitto. Come? Instaurando dei rapporti di scambio diversi dai valori, calcolati in maniera tale da garantire un ricarico proporzionale al capitale totale (e non più solo al capitale variabile come avviene con i valori: si veda l'equazione (4.1′)). Per Marx questa è un'altra distorsione che avviene nei sistemi capitalistici, uno sfruttamento di alcuni settori a danno di altri (la prima è quella costituita dalla differenza tra lavoro erogato e lavoro pagato). Le grandezze *originarie* sono i valori; i prezzi sono delle grandezze *derivate* (dai valori), che operano una redistribuzione del plusvalore in base alla logica capitalistica che pone il capitale al centro del processo di produzione.

2 Trasformazione dei valori in "prezzi di produzione"

Se nella realtà le merci si scambiano in maniera tale da rendere uniforme il saggio di profitto fra i vari settori, vuol dire che i capitalisti si appropriano del plusvalore viene appropriato in un modo diverso da come esso si è formato. Infatti secondo Marx il plusvalore è prodotto dal solo capitale variabile (cioè dal lavoro) e valori sono calcolati in modo tale da riflettere ciò (si veda l'equazione (4.1′)). Il sistema capitalistico opera però come una specie di "serbatoio" che da un lato raccoglie tutto il plusvalore che si forma e dall'altro lo redistribuisce non più in proporzione al capitale variabile (cioè così come si è formato), ma in proporzione al capitale totale.

Il fondo comune sul quale si opera questa redistribuzione sarebbe costituito da $s_1 + s_2 + s_3$; il saggio medio di profitto sarebbe:[1]

$$\pi = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{c_1 + c_2 + c_3 + v_1 + v_2 + v_3}. \tag{4.8}$$

Possiamo ora introdurre i nuovi rapporti di scambio attraverso i quali si opera la suddetta redistribuzione del plusvalore, e che Marx chiama “prezzi di produzione”:

$$\begin{array}{rcl} p_1 & = & (c_1 + v_1)(1 + \pi) \\ p_2 & = & (c_2 + v_2)(1 + \pi) \\ p_3 & = & (c_3 + v_3)(1 + \pi). \end{array} \tag{4.9}$$

Marx a questo punto osserva che:

1. i profitti totali sono uguali al plusvalore totale. Infatti:

$$\begin{aligned} \text{profitti totali: } P &:= P_1 + P_2 + P_3 = \\ &= \pi(c_1 + v_1) + \pi(c_2 + v_2) + \pi(c_3 + v_3) = \\ &= \pi(c_1 + c_2 + c_3 + v_1 + v_2 + v_3), \\ \text{(per la (4.9))} \qquad &= s_1 + s_2 + s_3 := S; \end{aligned}$$

2. la produzione totale, valutata ai prezzi di produzione, è pari alla produzione totale valutata ai valori:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= c_1 + v_1 + P_1 + c_2 + v_2 + P_2 + c_3 + v_3 + P_3 = \\ &= c_1 + c_2 + c_3 + v_1 + v_2 + v_3 + P_1 + P_2 + P_3 = \\ &= C + V + P, \end{aligned}$$

[1] Si osservi che il saggio medio di profitto così definito è una media ponderata dei saggi di profitto delle diverse sfere di produzione, i cui pesi sono dati dalle rispettive proporzioni di capitale totale anticipato: si ha infatti che

$$\pi = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{c_1 + c_2 + c_3 + v_1 + v_2 + v_3} = \frac{\frac{s_1}{c_1+v_1}(c_1 + v_1) + \frac{s_2}{c_2+v_2}(c_2 + v_2) + \frac{s_3}{c_3+v_3}(c_3 + v_3)}{(c_1 + v_1) + (c_2 + v_2) + (c_3 + v_3)} =$$

$$= \pi_1 \frac{c_1 + v_1}{\sum_{i=1}^3 (c_i + v_i)} + \pi_2 \frac{c_2 + v_2}{\sum_{i=1}^3 (c_i + v_i)} + \pi_3 \frac{c_3 + v_3}{\sum_{i=1}^3 (c_i + v_i)} = \sum_{i=1}^3 \pi_i \omega_i,$$

dove $\omega_i = (c_i + v_i)/\sum_{i=1}^3 (c_i + v_i)$.

dove $C := c_1 + c_2 + c_3$ e $V := v_1 + v_2 + v_3$; d'altra parte:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &= c_1 + c_2 + c_3 + v_1 + v_2 + v_3 + s_1 + s_2 + s_3 \\ &= C + V + S; \end{aligned}$$

ricordando che $P = S$ segue ciò che si voleva provare.

Sulla base di queste due osservazioni Marx conclude che la trasformazione dei valori in prezzi di produzione operata dal sistema capitalistico è solo una *redistribuzione* di plusvalore che si è già formato nella sfera di produzione; questa trasformazione serve solo a creare la mistificazione che tutto il capitale è produttivo, non solo il capitale variabile, cosicché appaia legittima l'appropriazione del profitto da parte dei capitalisti; in realtà invece il profitto è solo plusvalore mascherato. Se le merci venissero scambiate ai valori (anziché ai prezzi di produzione) il plusvalore verrebbe ad essere distribuito in modo proporzionale al solo capitale variabile, e così si percepirebbe che solo il fattore lavoro è produttivo,[2] e che l'appropriazione del plusvalore da parte dei capitalisti costituisce uno sfruttamento dei lavoratori, in quanto una parte di lavoro erogato non viene pagato. Il sistema capitalistico però, mediante la trasformazione dei valori in prezzi di produzione, nasconde questo aspetto: distribuendo il plusvalore in proporzione al capitale totale si dà l'illusione che tutto il capitale sia produttivo.

3 Esempio numerico

Nella tabella 4.1 calcoliamo i valori, il saggio di plusvalore, la composizione organica del capitale e il saggio di profitto di ciascun settore sulla base dei dati annotati nelle prime tre colonne della tabella.

Si noti come le grandezze riportate nella tabella 4.1 rispettino le condizioni (4.2) della riproduzione semplice: il valore della produzione di capitale costante (375) coincide con il capitale costante utilizzato nella produzione (375); lo stesso si può dire della produzione di capitale

[2]Si "immette" infatti v_i e si ottiene $v_i + s_i$; per tale ragione le sussistenze vengono chiamate capitale *variabile*, a differenza degli altri mezzi di produzione che costituiscono il capitale costante.

Settore	c_i	v_i	s_i	m_i	$\sigma_i = \frac{s_i}{v_i}$	$\gamma_i = \frac{c_i}{v_i}$	$\pi_i = \frac{s_i}{c_i+v_i}$
1	225	90	60	375	2/3	2,5	0,19
2	100	120	80	300	2/3	$0,8\bar{3}$	$0,\overline{36}$
3	50	90	60	200	2/3	$0,\bar{5}$	0,43
	375	300	200	875		$(\bar{\gamma} = 0,8)$	

Tabella 4.1: **Tabella in valori**

variabile e di beni di lusso. Inoltre si può notare come i saggi di profitto calcolati a partire dai valori siano diversi da settore a settore.

Calcoliamo ora il saggio medio di profitto: $\pi = S/(C+V) = 200/675 = 0,\overline{296}$. Trasformiamo ora i valori così ottenuti in prezzi di produzione.

Settore	c_i	v_i	s_i	m_i	$0,\overline{296}(c_i+v_i)$ (profitti)	$0,\overline{296}(c_i+v_i)$ (prezzi)	$p_i - m_i$
1	225	90	60	375	$93,\bar{3}$	$408,\bar{3}$	$33,\bar{3}$
2	100	120	80	300	$65,\overline{185}$	$285,\overline{185}$	$-14,\overline{814}$
3	50	90	60	200	$41,\overline{481}$	$182,\overline{481}$	$-18,\overline{518}$
	375	300	200	875	200	875	

Tabella 4.2: **Tabella in prezzi di produzione**

Si osservi che la somma dei valori coincide con la somma dei prezzi di produzione, così come la somma dei plusvalori coincide con la somma dei profitti. Tuttavia la trasformazione operata dei valori in prezzi viene a violare le condizioni della riproduzione semplice (definite dalla relazione (4.2)): la produzione del primo settore (quello che produce il capitale costante), valutata ai prezzi $(408,\bar{3})$ è superiore al capitale costante utilizzato (375); analogamente la produzione del secondo settore, che produce i beni di sussistenza, valutata ai prezzi di produzione $(285,\overline{185})$ è inferiore ai beni di sussistenza utilizzati nel processo produttivo (300); da ultimo la produzione di beni di lusso valutata ai prezzi $(182,\overline{481})$ è inferiore al plusvalore totale (200). Ciò non è accettabile perché il passaggio dai valori ai prezzi di produzione non dovrebbe avere nulla a che fare con le proprietà di stazionarietà o di non stazionarietà del sistema.

4 L'"errore" di Marx e la soluzione di Bortkiewicz

Il problema prima evidenziato si fonda però su un errore che non è intrinseco al processo di trasformazione, ma al modo con cui questo è stato impostato. Infatti il processo di trasformazione proposto da Marx è parziale perché mentre si applica alle merci quando vengono considerate come prodotti (cioè quando sono scritte al primo membro delle equazioni dei prezzi (4.9)) non si applica alle stesse quando esse sono viste come mezzi di produzione (cioè quando sono scritte al secondo membro delle equazioni (4.9)); in altri termini mentre per le merci prodotte i valori sono stati trasformati in prezzi ciò non è avvenuto per le merci usate per produrle.

von Bortkiewicz (1907) ha presentato un metodo alternativo (e corretto) per trasformare i valori in prezzi di produzione. Utilizziamo ancora la normalizzazione delle quantità in base alla quale la produzione totale della industria 1 corrisponde a una unità fisica di capitale costante (e analogamente sia per le altre industrie). Il prezzo di produzione di 1 unità di capitale costante sia λ_1 volte il suo valore; il prezzo di produzione di 1 unità di capitale variabile sia λ_2 volte il suo valore e il prezzo di produzione di 1 unità di beni di lusso sia λ_3 volte il suo valore, cioè

$$p_1 = \lambda_1 C, \quad p_2 = \lambda_2 V \quad \text{e} \quad p_3 = \lambda_3 S, \tag{4.10}$$

con λ_1, λ_2 e λ_3 incognite da determinare. Sia inoltre π il saggio generale di profitto. Valgono ancora le condizioni (4.2) della riproduzione semplice; esse, una volta trasformate in termini di prezzi di produzione, diventano:

$$\begin{array}{rcl} (c_1\lambda_1 + v_1\lambda_2)(1+\pi) & = & (c_1 + c_2 + c_3)\lambda_1 \\ (c_2\lambda_1 + v_2\lambda_2)(1+\pi) & = & (v_1 + v_2 + v_3)\lambda_2 \\ (c_3\lambda_1 + v_3\lambda_2)(1+\pi) & = & (s_1 + s_2 + s_3)\lambda_3 \end{array} \tag{4.11}$$

Si è così scritto un sistema di tre equazioni con 4 incognite: λ_1, λ_2, λ_3 e π. Una di queste incognite dovrà dunque essere fissata esogenamente al sistema (4.11). Poiché dal punto di vista economico ha senso fissare pari a 1 il prezzo di una merce potremmo fissare, ad esempio,

$$p_3 = 1 \tag{4.12}$$

(esprimiamo cioè i prezzi del capitale costante e del capitale variabile in termini di una unità del bene di lusso). Ma la (4.12) permette allora di chiudere il grado di libertà del sistema (4.11): infatti essa, una volta la sostituita nella (4.10), implica:

$$\lambda_3 = 1/S.$$

Una volta risolto il sistema (4.11) si sostituiscono i valori trovati[3] per le λ_i nelle (4.10) e si ottengono i prezzi di produzione.

Si noti come in questa impostazione del problema della trasformazione il saggio di profitto viene determinato *congiuntamente* ai prezzi di produzione, e non in via prioritaria, come faceva Marx desumendolo direttamente dai valori (cfr. equazione (4.8)). L'interdipendenza fra prezzi e distribuzione del reddito viene a rompere il ragionamento di tipo *causale* che voleva condurre Marx, secondo il quale dai valori si poteva calcolare il saggio di profitto e da quest'ultimo i prezzi. Determinare il saggio di profitto all'interno del sistema dei valori soltanto avrebbe fatto da fondamento all'idea che il profitto è lavoro non pagato. Invece

[3] Le soluzioni del sistema (4.11) sono:

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{f_2 g_1 + g_2 - \sqrt{(g_2 - f_2 g_1)^2 + 4 f_1 f g_1 g_2}}{2(f_2 - f_1)} - 1 =: \bar{\pi} \qquad (4.13)\\
\lambda_3 &= 1/S\\
\lambda_2 &= \frac{g_2/S}{g_2 + (f_3 - f_2)(1+\bar{\pi})} =: \bar{\lambda}_2\\
\lambda_1 &= \frac{(1+\bar{\pi}) f_1 \bar{\lambda}_2}{g_1 - (1+\bar{\pi})},
\end{aligned}$$

dove

$$f_i := v_i/c_i, \quad g_i := (v_i + c_i + s_i)/c_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Si noti come la soluzione rispetto al saggio di profitto sia indipendente dalle condizioni di produzione dei beni di lusso.

la determinazione del saggio di profitto congiuntamente ai prezzi di produzione offusca il legame fra profitto e sfruttamento, anche se in diverse analisi successive è stato dimostrato che il saggio di profitto è positivo se e solo se il saggio di sfruttamento è positivo (si veda Morishima (1973)).[4]

Possiamo da ultimo vedere come si può operare la trasformazione dei valori in prezzi di produzione seguendo il metodo di Bortkiewicz partendo dai dati dell'esempio numerico della tabella 4.1. Risolvendo il sistema (4.10)-(4.11) i prezzi di produzione e il saggio di profitto che si ottengono sono:

$$\pi = 0,25, \quad p_1 = 1,28, \quad p_2 = 1,0\bar{6}, \quad p_3 = 1;$$

le grandezze settoriali espresse in prezzi di produzione sono pertanto:

Settore	$\lambda_1 c_i$	$\lambda_2 v_i$	$0,25(\lambda_1 c_i + \lambda_2 v_i)$ (profitti)	p_i (prezzi)
1	288	96	96	480
2	128	128	64	320
3	64	96	40	200
	480	320	200	1000

Tabella 4.3: **Tabella in prezzi di produzione (metodo di Bortkiewicz)**

Va osservato che mentre la somma dei profitti (200) coincide con la somma dei plusvalori, la somma dei valori della produzione totale (875) *non* coincide con la somma dei prezzi della produzione totale (1000). Ma ciò non costituisce un problema dal punto di vista economico, essendo soltanto una conseguenza delle scelte che sono state fatte circa il numerario: nel sistema dei valori il numerario scelto è l'unità di lavoro, nel sistema dei prezzi una unità del bene di lusso.

[4] Si osservi come anche Ricardo si è scontrato con il problema dell'interdipendenza fra prezzi e distribuzione, anche se le ragioni per cui Ricardo cercava di ragionare in maniera causale erano di natura diversa da quelle di Marx.

Capitolo 5

Analisi neoclassica

1 Modello di equilibrio economico generale di scambio

È questo il modello "mininale" per descrivere la logica della teoria neoclassica (si vedano, ad esempio, Walras (1874), Pareto (1897), Arrow e Debreu (1954)).

Consideriamo un sistema economico con I individui, $i = 1, \ldots, I$ ed M merci, $m = 1, \ldots, M$. Non c'è attività di produzione (si tratta evidentemente di una semplificazione; la sua reintroduzione è sempre possibile ma non modifica sostanzialmente i risultati). C'è solo *scambio*; le M merci sono disponibili in natura in quantità date (e non sono modificabili in quanto non c'è produzione). Tali merci sono allocate inizialmente tra i vari individui; queste "dotazioni iniziali" sono rappresentate dai seguenti I vettori a M componenti:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \vdots \\ \bar{x}_{m1} \\ \vdots \\ \bar{x}_{M1} \end{bmatrix}, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1i} \\ \vdots \\ \bar{x}_{mi} \\ \vdots \\ \bar{x}_{Mi} \end{bmatrix}, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_I = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1I} \\ \vdots \\ \bar{x}_{mI} \\ \vdots \\ \bar{x}_{MI} \end{bmatrix},$$

dove $\bar{x}_{mi}$ indica la quantità di merce m posseduta inizialmente dall'individuo i. Gli individui possono scambiarsi liberamente queste dotazioni in base a certi rapporti di scambio (prezzi relativi) che ciascuno di essi prenderà per dati[1], ma che sarà il sistema stesso (il "mercato") a deter-

[1]Si suppone che I sia sufficientemente grande in maniera tale che le decisioni di

minare. Il problema principale studiato dalla teoria dell'equilibrio economico generale è l'esistenza di un sistema di prezzi relativi che rende compatibili le decisioni di scambio dei diversi individui; tale compatibilità consiste nell'uguaglianza per ciascuna merce fra domanda totale (cioè relativa a tutti gli individui) e offerta totale.

1.1 Scelte dell'individuo i

L'individuo i considera il vettore dei prezzi delle merci, $\mathbf{p}$, come un dato; possiede le dotazioni $\bar{\mathbf{x}}_i$; può venderle e con il ricavato, $\mathbf{p}^T\bar{\mathbf{x}}_i$, può comprare il vettore $\mathbf{x}_i$ (in generale $\mathbf{x}_i \neq \bar{\mathbf{x}}_i$). Come sceglie $\mathbf{x}_i$? Prima di tutto l'acquisto di $\mathbf{x}_i$ deve rispettare il vincolo di bilancio, $\mathbf{p}^T\mathbf{x}_i \leq \mathbf{p}^T\bar{\mathbf{x}}_i$. Ciò però non determina univocamente la scelta di acquisto di i; si suppone però che i sia dotato di un sistema di preferenze, $\succsim_i$,[2] che per semplicità di esposizione supponiamo sia rappresentabile da una funzione $u_i : \Re^M_+ \mapsto \Re$, tale che $u_i(\mathbf{x}_i) \geq u_i(\mathbf{y}_i)$ ogniqualvolta $\mathbf{x}_i \succsim_i \mathbf{y}_i$; tale funzione viene detta *funzione di utilità*.

Si suppone che u_i soddisfi le seguenti ipotesi:[3]

1. u_i è continua con derivate parziali prime e seconde continue;
2. $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_{mi}} > 0$ per ogni m;
3. $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_{mi}^2} < 0$ per ogni m.

---

ciascun individuo preso singolarmente siano ininfluenti sui prezzi; in altri termini si suppone che vi sia concorrenza perfetta tra gli individui.

[2]La scrittura $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ significa che il paniere di merce $\mathbf{x}$ è preferito o indifferente rispetto al paniere $\mathbf{y}$ dall'individuo in esame.

[3]Normalmente le supposizioni riguardanti le preferenze del consumatore vengono introdotte sulla relazione di preferenza $\succsim$ e si dimostra poi che sotto opportune ipotesi tale relazione è rappresentabile da una funzione di utilità avente certe proprietà; per semplicità in questo contesto si introducono le proprietà delle preferenze direttamente sulla funzione di utilità. Per una trattazione più generale e, in particolare, per il problema della rappresentabilità di un sistema di preferenze attraverso una funzione di utilità si veda, ad esempio, Mas-Colell, Whinston, e Green (1995, capitolo 3).

Ciascuna derivata parziale della funzione di utilità, $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_{im}}$, è la cosiddetta *utilità marginale* della merce m, cioè la variazione dell'utilità conseguente a una variazione unitaria della quantità consumata di merce m, ferme restando le quantità consumate delle altre merci. L'ipotesi 2 afferma che ciascun incremento unitario di quantità consumata di merce m aumenta l'utilità (ipotesi di non-sazietà); l'ipotesi 3 afferma che questi incrementi di utilità sono man mano più smorzati al crescere della quantità di merce m consumata (utilità marginale decrescente).

Il consumatore sceglierà $\mathbf{x}_i$ in modo da massimizzare u_i subordinatamente al vincolo di bilancio:

$$\max_{\mathbf{x}_i} u_i(\mathbf{x}_i) \quad \text{s. v.} \quad \mathbf{p}^T\mathbf{x}_i \leq \mathbf{p}^T\bar{\mathbf{x}}_i. \tag{5.1}$$

Le condizioni necessarie per un massimo vincolato interno (cioè con componenti x_i tutte positive) sono individuabili dalle seguenti condizioni poste sulla funzione lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{x}_i, \lambda) := u_i(\mathbf{x}_i) + \lambda(\mathbf{p}^T\bar{\mathbf{x}}_i - \mathbf{p}^T\mathbf{x}_i)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{mi}} = 0, \Leftrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_{mi}}(\mathbf{x}_i) = \lambda p_m, \quad m = 1, \ldots, M \tag{5.2a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0, \Leftrightarrow \mathbf{p}^T\mathbf{x}_i = \mathbf{p}^T\bar{\mathbf{x}}_i. \tag{5.2b}$$

(5.2) è un sistema di $M+1$ equazioni in $M+1$ incognite (le $\mathbf{x}_i$ e λ); il vettore $\mathbf{p}$ è un parametro. Pertanto le sue soluzioni possono essere viste come *funzioni* del vettore $\mathbf{p}$: $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) = [x_{mi}(\mathbf{p})]$ e $\lambda = \lambda(\mathbf{p})$. Il vettore $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ costituisce il vettore delle *funzioni individuali di domanda.*

Esempio 1. (Ottenimento delle funzioni individuali di domanda) *Si consideri il caso di un consumatore che può scegliere le quantità acquistabili di due merci, '1' e '2'. La funzione di utilità del consumatore è* $u = (x_1)^{1/2} + (x_2)^{1/2}$, *dove* x_1 *e* x_2 *sono le quantità consumate delle due merci. In tal caso le condizioni* *necessarie al raggiungimento del massimo (5.2) diventano:*

$$\frac{1}{2}x_1^{-1/2} = \lambda p_1 \tag{5.2a$'$}$$

$$\frac{1}{2}x_2^{-1/2} = \lambda p_2 \tag{5.2a$''$}$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2. \tag{5.2b$'$}$$

Risolvendo questo sistema rispetto a x_1 *e* x_2 *e considerando* p_1 *e* p_2 *come parametri si ottiene:*

$$x_1(\mathbf{p}) = \frac{\bar{x}_1 + (p_2/p_1)\bar{x}_2}{1 + p_1/p_2} \quad e \quad x_2(\mathbf{p}) = \frac{(p_1/p_2)\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{1 + p_2/p_1}.$$

$x_{im}(\mathbf{p})$ costituisce la domanda *lorda* della merce m, cioè la quantità *totale* che l'individuo i vuole possedere della merce m dopo gli scambi. Ciascun individuo possiede però già una quantità $\bar{x}_{im}$ di merce m; pertanto la quantità di merce m che i acquisterà sul mercato sarà pari a $x_{im} - \bar{x}_{im}$; tale quantità se positiva costituisce la domanda *netta* e se negativa costituisce l'offerta *netta* della merce m esercitata dall'individuo i (si veda la figura 5.1).

Sulla forma delle funzioni individuali di domanda non si può dire "molto"; si può dimostrare che

$$\mathbf{p}^T \mathbf{x}_i(\mathbf{p}^T) = \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{x}}_i \tag{5.3}$$

e che

$$\mathbf{x}_i(t\mathbf{p}) = \mathbf{x}_i(\mathbf{p}), \quad t > 0, \tag{5.4}$$

cioè il *valore* delle quantità domandate dall'individuo coincide col *valore* delle quantità da lui offerte (eq. (5.3)) e che le quantità domandate non dipendono dal *livello* dei prezzi ma solo dai *prezzi relativi* (eq. (5.4)). In particolare *non* si può dire che, in generale,

$$\frac{\partial x_{im}}{\partial p_m} < 0,$$

a causa della possibile presenza di un effetto di reddito di segno opposto e di valore assoluto maggiore dell'effetto di sostituzione (è il caso dei cosiddetti "beni di Giffen").

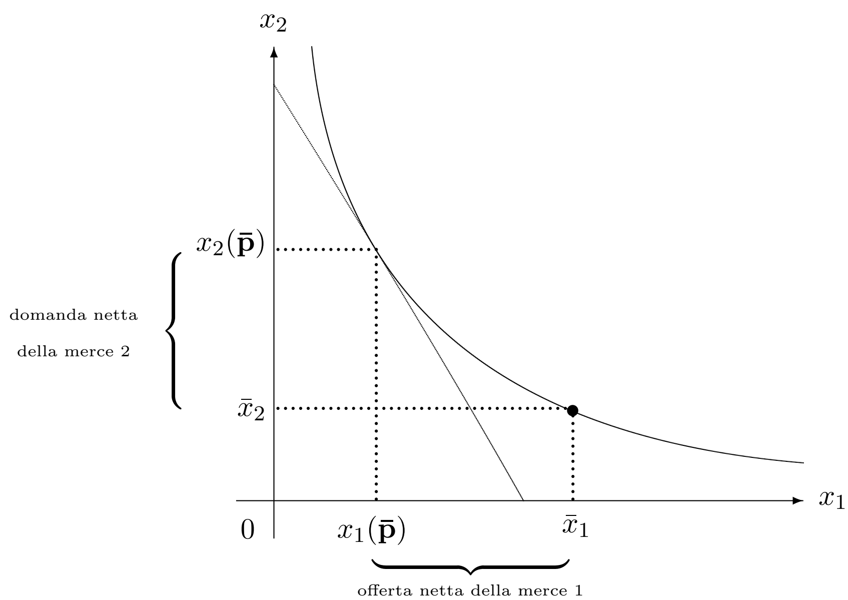


Figura 5.1: Equilibrio del consumatore

1.2 Funzioni di domanda e di offerta totali

Siano

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) := \sum_{i=1}^{I} \mathbf{x}_i(\mathbf{p}) \tag{5.5}$$

e

$$\bar{\mathbf{x}} := \sum_{i=1}^{I} \bar{\mathbf{x}}_i. \tag{5.6}$$

(5.5) è il vettore delle funzioni di domanda totali e (5.6) è il vettore delle funzioni di offerta totali. Le funzioni di domanda totale "ereditano" le proprietà (5.3) e (5.4) delle funzioni individuali:

$$\mathbf{p}^T\mathbf{x}(\mathbf{p}^T) = \mathbf{p}^T\bar{\mathbf{x}} \tag{5.3$'$}$$

e

$$\mathbf{x}(t\mathbf{p}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}), \quad t > 0. \tag{5.4$'$}$$

La (5.3′) è la cosiddetta "legge di Walras", che afferma che il *valore* della domanda totale è uguale al *valore* dell'offerta totale. Una annotazione va fatta a questo proposito: essa non ha nulla a che vedere con l'equilibrio dei mercati, che è costituito, come vedremo, dall'uguaglianza delle *quantità* domandate e offerte su ciascun mercato. Si tratta di una proprietà che lega il *valore* di tutte le funzioni di domanda e di offerta, che deriva dal fatto che le funzioni individuali di domanda soddisfano il vincolo di bilancio. Essa, come tale, vale sia in corrispondenza dell'equilibrio dei mercati che fuori dall'equilibrio.

1.3 Equilibrio economico generale

Nel contesto della teoria del consumatore i prezzi delle merci sono stati considerati o come dei dati,[4] quando si imposta il problema di scelta ottima, o come ipoteticamente variabili, quando si costruiscono le funzioni

[4] Ciò è giustificato dal fatto che si analizza un sistema economico in concorrenza perfetta.

di domanda. È venuto ora il momento di analizzare come si determinano i prezzi delle merci nella teoria neoclassica. L'equilibrio economico generale è una situazione nella quale

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) \leq \bar{\mathbf{x}}. \tag{5.7}$$

Il problema principale della teoria dell'equilibrio economico generale è verificare se esista o meno un vettore $\mathbf{p}$ che soddisfa la (5.7). Walras (1874) ha formulato questo problema in termini di equazioni (anziché disequazioni) e poi si è limitato a contare equazioni e incognite:

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \bar{\mathbf{x}} \tag{5.8}$$

sono M equazioni in M incognite (i prezzi). Come si può osservare facilmente il sistema (5.8) contiene al più $M-1$ equazioni indipendenti.[5] Pertanto il sistema (5.8) è in grado di determinare solo i *prezzi relativi*; un prezzo dovrà essere fissato esogenamente al sistema e normalmente viene fissato pari a 1; la corrispondente merce sarà il *numerario* del sistema dei prezzi.

[5] Per verificare ciò si osservi che le funzioni di domanda totali soddisfano per costruzione la cosiddetta "legge di Walras" (l'equazione (5.3′)), che, per comodità scriviamo qui in forma estesa:

$$p_1 x_1(\mathbf{p}) + \cdots + p_m x_m(\mathbf{p}) + \cdots + p_M x_M(\mathbf{p}) = p_1 \bar{x}_1 + \cdots + p_m \bar{x}_m + \cdots + p_M \bar{x}_M. \tag{5.3″}$$

Una conseguenza immediata della 5.3″ è che se $M-1$ mercati sono in equilibrio risulta automaticamente in equilibrio anche l'M-esimo. Supponiamo infatti che le prime $M-1$ equazioni del sistema (5.8) siano soddisfatte (si potrebbe ripetere lo stesso ragionamento per qualsiasi altro insieme di $M-1$ equazioni). Ciò significa che

$$x_1(\mathbf{p}) = \bar{x}_1, \quad \ldots, \quad x_m(\mathbf{p}) = \bar{x}_m, \quad \ldots, \quad x_{M-1}(\mathbf{p}) = \bar{x}_{M-1}. \tag{5.9}$$

Sostituendo le (5.9) nella (5.3″) i primi $M-1$ addendi si semplificano, e quest'ultima si riduce a $p_M x_m(\mathbf{p}) = p_M \bar{x}_M$, cioè

$$x_M(\mathbf{p}) = \bar{x}_M \quad (\text{per } p_M \neq 0), \tag{5.10}$$

che è appunto la condizione di equilibrio sull'm-esimo mercato. Ciò significa che una delle equazioni del sistema (5.8) è linearmente dipendente dalle altre, cioè che il sistema (5.8) contiene solo $M-1$ equazioni linearmente indipendenti.

La dimostrazione di esistenza di Walras poggia dunque sul conteggio delle equazioni e delle incognite. I limiti di tale approccio sono sostanzialmente due. Prima di tutto il conteggio di equazioni indipendenti e incognite—che basterebbe ad assicurare l'esistenza di soluzioni di un sistema di equazioni lineari—non basta ad assicurare l'esistenza di una soluzione di equilibrio economico generale, in quanto le funzioni in gioco (le funzioni di domanda) non sono lineari. In secondo luogo il conteggio non esclude la presenza di soluzioni negative, che non sarebbero significative dal punto di vista economico.

L'approccio più moderno (introdotto da von Neumann (1938) e Arrow e Debreu (1954)) si basa prima di tutto su una definizione più generale di equilibrio, in base alla quale si ha equilibrio se la domanda è minore o uguale all'offerta su tutti i mercati,

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) \leq \bar{\mathbf{x}}; \tag{5.11}$$

in secondo luogo la prova di esistenza di un vettore $\mathbf{p}$ non-negativo che soddisfa la (5.11) si basa su tecniche matematiche più sofisticate (in particolare i teoremi del punto fisso), che si sono diffuse fra gli economisti solo a partire dai primi anni '50 grazie ai lavori di Von Neumann.[6]

[6] La dimostrazione di esistenza, che qui non riportiamo, in quanto va oltre le intenzioni di questi appunti, possiede un corollario che incorpora un certo interesse economico. Sia $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{o}$ quel vettore non-negativo che assicura l'equilibrio sui mercati e si supponga che in corrispondenza di $\mathbf{p}^*$ le condizioni di equilibrio siano soddisfatte col segno di disuguaglianza stratta per una o più merci; indicando con $\mathcal{M}$ l'insieme delle merci si ha pertanto

$$x_m(\mathbf{p}^*) < \bar{x}_m, \quad m \in \mathcal{M}_1 \tag{5.12a}$$

$$x_m(\mathbf{p}^*) = \bar{x}_m, \quad m \in \mathcal{M}_2, \tag{5.12b}$$

$$\text{dove} \quad \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 = \mathcal{M} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset.$$

Sostituendo la (5.12) nella (5.3′) si vede che in quest'ultima si semplificano tutti gli addendi relativi alle merci del sottoinsieme $\mathcal{M}_2$, e la (5.3′) si riduce a

$$\sum_{m \in \mathcal{M}_1} p_m^* x_m(\mathbf{p}^*) = \sum_{m \in \mathcal{M}_1} p_m^* \bar{x}_m,$$

cioè

$$\sum_{m \in \mathcal{M}_1} p_m^* [x_m(\mathbf{p}^*) - \bar{x}_m] = 0. \tag{5.13}$$

*1.4 Ottimalità dell'equilibrio walrasiano (cenni)**

Uno dei risultati più rilevanti, a fianco della dimostrazione di esistenza di un equilibrio walrasiano, è quello della prova delle sue caratteristiche di "efficienza" in una accezione che è stata definita in maniera precisa da Vilfredo Pareto. Secondo Pareto una allocazione è giudicata efficiente se non è possibile aumentare il livello di utilità di nessun individuo senza dover ridurre quello di un altro. Si può dimostrare che un equilibrio walrasiano è Pareto-efficiente. Questo risultato, che va sotto il nome di "primo teorema dell'economia del benessere", ha costituito la base scientifica a sostegno del libero mercato. Va tuttavia fatto notare che esso è valido all'interno dei limiti posti dalle ipotesi su cui è costruito il modello: informazione completa circa tutti gli elementi rilevanti nelle scelte degli agenti, assenza di esternalità e di beni pubblici, e concorrenza perfetta tra gli agenti. Quest'ultima ipotesi risulta cruciale e impone che gli individui siano sufficientemente numerosi da non essere in grado di influenzare in maniera significativa i prezzi di mercato con le proprie decisioni (quindi va esclusa qualsiasi situazione di oligopolio o di monopolio). Un ampio filone di letteratura ha indagato i cosiddetti "fallimenti del mercato" nel raggiungere la Pareto-efficienza che si verificano al venir meno di ciascuna delle suddette ipotesi.

*1.5 Numerosità degli equilibri (cenni)**

Un altro aspetto che ha interessato gli studiosi dell'equilibrio economico generale, con esiti indubbiamente meno favorevoli, è stato quello relativo alla numerosità delle configurazioni di equilibrio economico generale. Difatti non si è riusciti a dimostrare l'unicità dell'equilibrio; questo è sicuramente un aspetto problematico per una teoria che ha come scopo quello di "predire" il funzionamento di un'economia di mercato e di evidenziarne le caratteristiche di efficienza. Per renderci conto della possibile presenza di più equilibri nel modello walrasiano consideriamo

---

Dalle (5.12a) si deduce che tutti i termini fra parentesi quadrate della (5.13) sono strettamente negativi. Poiché $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{o}$ si deduce che deve essere $p^*_m = 0$ per $m \in \mathcal{M}_1$; pertanto tutti quelle merci che in equilibrio presentano un eccesso di offerta hanno prezzo nullo: tali merci vengono chiamate *beni liberi*.

il caso semplificato di un'economia con sole due merci, in modo da affrontare il problema dal punto di vista grafico. Per quanto si è detto la legge di Walras consente di studiare l'equilibrio solo su uno di questi due mercati, in quanto l'equilibrio su un mercato si ha se e solo se si ha equilibrio sull'altro. Concentriamo l'attenzione pertanto sul primo mercato e consideriamo un caso in cui l'equilibrio avvenga mediante *uguaglianza* della domanda con l'offerta:

$$x_1(p_1, p_2) = \bar{x}_1; \tag{5.14}$$

poiché le funzioni di domanda sono omogenee di grado 1 (cfr. eq. (5.4′)) la (5.14) è equivalente a $x_1(tp_1, tp_2) = \bar{x}_1, \quad \forall t \neq 0$. Fissando $t = 1/p_2$ essa diventa $x_1(p_1/p_2, 1) = \bar{x}_1$; ponendo $p = p_1/p_2$ l'equazione di equilibrio può essere scritta come $x_1(p, 1) - \bar{x}_1 = 0$; definiamo ora con $e_1(p) := x_1(p, 1) - \bar{x}_1$ la funzione di *eccesso di domanda* della merce 1. La condizione (5.14), che assicura l'equilibrio sul mercato 1 (e di conseguenza anche sul mercato 2) può essere scritta nella forma:

$$e_1(p) = 0. \tag{5.14′}$$

Sotto ipotesi ragionevoli si può dimostrare che $\lim_{p \to 0^+} e_1(p) = +\infty$ e che $\lim_{p \to +\infty} e_1(p) = -\infty$. Graficamente, pertanto, l'equilibrio walrasiano può essere rappresentato dal punto (W) di intersezione della funzione di eccesso di domanda con l'asse delle ascisse (cfr. figura 5.2). Tuttavia, però, la funzione di eccesso di domanda non è necessariamente decrescente (in quanto, come si è accennato nel paragrafo 1.1 non si riesce a dimostrare la decrescenza delle funzioni di domanda); possono pertanto capitare situazioni come quella indicata nella figura 5.3.

Al limite, introducendo l'ipotesi di differenziabilità della funzione di utilità è possibile escludere la possibilità di avere dei *continuum* di equilibri come quello rappresentato nella figura 5.3; non si riesce però a escludere la possibile molteplicità di equilibri walrasiani isolati.

*1.6 Stabilità degli equilibri (cenni)**

Finora ci è posti il problema di verificare l'*esistenza* e la numerosità degli equilibri walrasiani, ma non si è affrontato il problema di come in

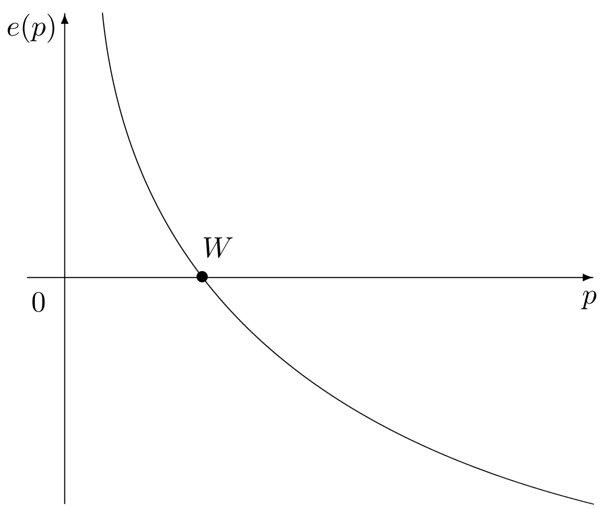


Figura 5.2: Equilibrio walrasiano

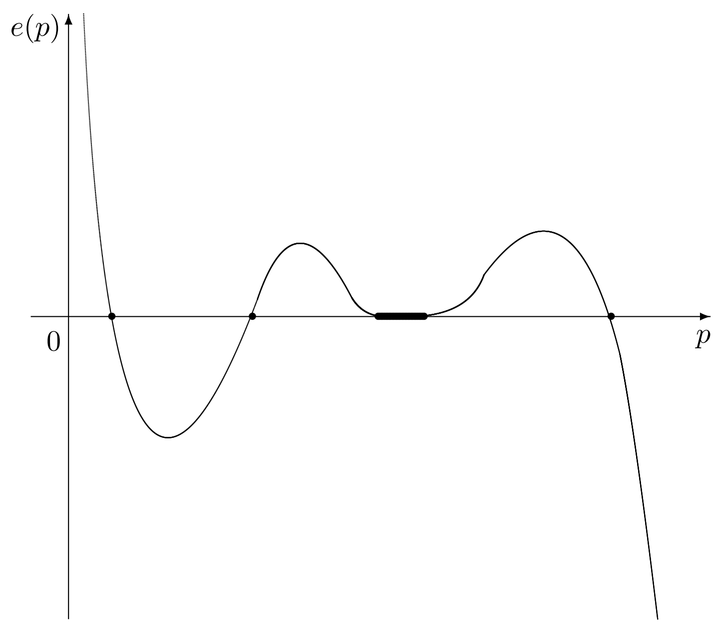


Figura 5.3: Molteplicità di equilibri walrasiani

un'economia come quella descritta si vada effettivamente a stabilire il (un) sistema di prezzi di equilibrio walrasiano. Il problema è rilevante, in quanto nell'economia descritta non c'è un pianificatore centrale, che potrebbe imporre il sistema dei prezzi di equilibrio; al contrario le decisioni di acquisto e vendita sono prese liberamente dai singoli agenti in maniera indipendente l'uno dall'altro. In altri termini ci si potrebbe porre il problema di se e come il sistema, partendo da un vettore di prezzi qualunque (non di equilibrio), $\mathbf{p}$, riesce a raggiungere la configurazione di equilibrio walrasiano, $\mathbf{p}^*$. Il problema è stato affrontato da Walras supponendo che quando il sistema si trova fuori dall'equilibrio il "mercato" tenda ad aumentare i prezzi delle merci in eccesso di domanda e a ridurre i prezzi delle merci in eccesso di offerta. Questi aggiustamenti sarebbero in grado di far convergere il sistema economico in esame verso gli equilibri $\bar{W}$ e $\tilde{W}$, non verso l'equilibrio $\hat{W}$ (si veda la figura 5.4). Si consideri infatti un livello iniziale del prezzo relativo della merce 1 in termini della merce 2, p_0, inferiore al prezzo di equilibrio walrasiano $\bar{p}$. In corrispondenza di p_0 si verifica un eccesso di domanda della merce 1; ciò porterà, secondo il processo descritto da Walras, a un aumento del prezzo fino a che l'eccesso di domanda si annulla, cioè fino al raggiungimento di $\bar{p}$. In tal caso si dice che l'equilibrio $\bar{W}$ è un *equilibrio localmente stabile*; se per una qualunque causa accidentale tale equilibrio venisse perturbato (di poco) il sistema sarebbe in grado di sviluppare al suo interno quelle forze per ripristinarlo. Analogo discorso si può fare per l'equilibrio $\tilde{W}$: in corrispondenza del prezzo p_0' si verifica un eccesso di domanda negativo, cioè un eccesso di offerta di merce 1; in tal caso p diminuirà facendo convergere il sistema verso l'equilibrio $\tilde{W}$, che sarà, pertanto, un equilibrio *localmente stabile*. Al contrario l'equilibrio $\hat{W}$ sarà un *equilibrio instabile*, in quanto se il sistema si trovasse esattamente in tale equilibrio tale posizione verrebbe mantenuta, ma non appena tale equilibrio subisse una seppur piccola perturbazione esso si allontanerebbe indefinitamente da $\hat{W}$, finendo col convergere o all'equilibrio $\bar{W}$ o all'equilibrio $\tilde{W}$. Come "regola" grafica possiamo dire che gli equilibri in corrispondenza dei quali la curva di eccesso di domanda attraversa l'asse delle ascisse con *inclinazione negativa* sono localmente stabili e, viceversa, sono instabili quelli per i quali la curva di eccesso di domanda attraversa l'asse delle ascisse con *inclinazione positiva.* L'analisi di stabilità pone però parecchi problemi che non emergono dal semplice esempio grafico qui considerato. Intanto bisognerebbe stabilire chi varia i prezzi in relazione agli eccessi di domanda o di offerta registrati. Walras ha inventato la famosa figura del "banditore", ma si tratta evidentemente di una finzione analitica, che non si riscontra nei mercati reali (salvo qualche eccezione). Inoltre il fatto che le funzioni di domanda delle merci (e, di conseguenza, le curve di eccesso di domanda) non siano sempre inclinate negativamente può condurre a equilibri instabili, come si è visto, ad esempio, nel caso dell'equilibrio $\hat{W}$. Un altro problema aperto è rappresentato dal fatto che i processi di aggiustamento all'equilibrio richiedono tempo, durante il quale è verosimile che avvengano degli scambi, seppur a prezzi non di equilibrio. Tali scambi influenzano le quantità domandate e offerte delle varie merci, spostando così la configurazione di equilibrio che doveva essere raggiunta con quegli aggiustamenti. Una scappatoia analitica è stata quella di supporre che gli scambi avvengano soltanto una volta raggiunta la posizione di equilibrio e non prima. Si tratta evidentemente di un'ipotesi non accettabile economicamente, la cui rimozione, però, complica notevolmente l'analisi. Per queste e per altre ragioni anche l'analisi di stabilità degli equilibri walrasiani sembra lontana dall'aver raggiunto risultati economicamente soddisfacenti.

1.7 Generalizzazioni del modello (cenni)

Il modello esposto presenta evidenti limitazioni dovute alle ipotesi estremamente semplificatrici sulla base delle quali è stato costruito: non considera il fenomeno della produzione delle merci (anche se la maggior parte delle merci oggetto di scambio sono beni prodotti e non beni già disponibili in natura), è un modello statico (descrive una situazione di equilibrio riferibile a un dato istante di tempo, senza descrivere ciò che è avvenuto prima e ciò che avviene dopo), e presuppone che tutti gli individui conoscano perfettamente e senza incertezza tutti gli elementi presenti e futuri rilevanti nella formulazione delle loro scelte. Come si è però detto all'inizio tale modello costituisce il modello "minimale" della teoria neoclassica, quello che descrive ciò che questo filone teorico ritiene

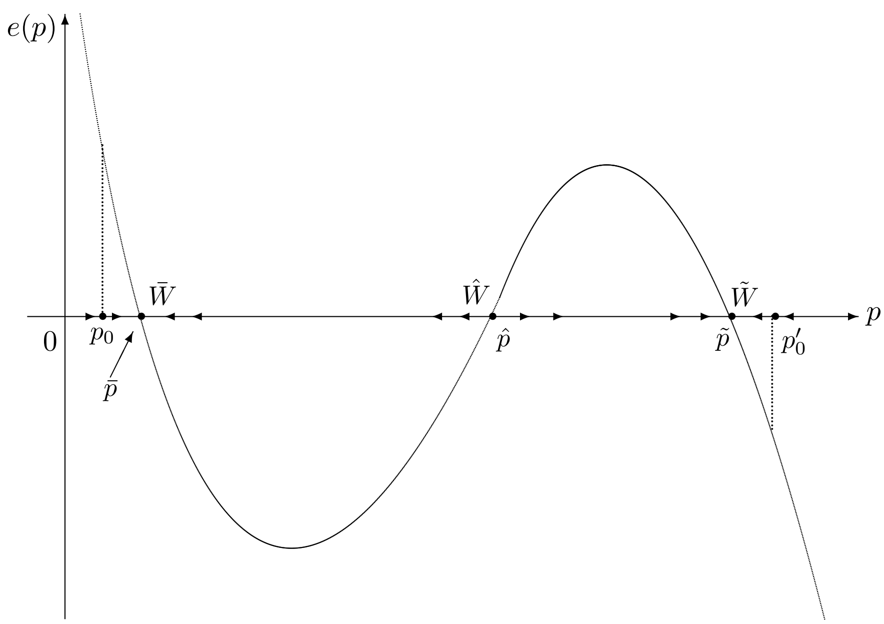


Figura 5.4: Stabilità degli equilibri walrasiani

siano gli elementi più importanti per la comprensione dei fenomeni relativi al funzionamento dei mercati e del sistema economico in generale. In altri termini è un'astrazione che serve per cogliere con nitidezza le forze principali operanti in un sistema economico, sfrondate da tutto ciò che costituisce invece solo una complicazione di questi meccanismi. Ecco che infatti gli studiosi dell'equilibrio economico generale hanno poi cercato di superare queste limitazioni, reintegrando nel modello di scambio tutte quelle "complicazioni" che sono state lasciate fuori dalla versione "minimale". La loro reintegrazione, come vedremo, sarà però fatta in maniera tale da non stravolgere la logica del modello di scambio. Il fenomeno della produzione sarà infatti introdotto in maniera tale da essere riconducibile a un problema di scambio: i beni scambiati saranno i fattori di produzione (offerti dagli individui e domandati dalle imprese) e le merci prodotte (offerte dalle imprese e domandate dagli individui).[7])

Gli aspetti temporali saranno introdotti, almeno in prima battuta, distinguendo le varie merci non solo in relazione alle loro caratteristiche fisiche, ma anche in relazione all'istante temporale in cui verranno ad essere disponibili; pertanto la stessa merce fisica sarà considerato un bene diverso a seconda che sia disponibile "oggi", tra un "anno", tra due, ecc. Per fare questa distinzione basta apporre un ulteriore indice a ciascuna quantità e a ciascun prezzo, che indichi l'istante temporale in cui la merce sarà disponibile: x_{mt} indicherà pertanto la quantità di merce m disponibile al tempo t, e p_{mt} il suo prezzo. Analiticamente la merce (m, t) può essere considerata come una merce distinta dalla merce (m, τ); se nell'analisi si considerano T istanti la considerazione degli aspetti temporali porterà solo a un aumento del numero dei beni (e corrispondentemente dei mercati, dei prezzi e delle funzioni di domanda e offerta e delle disequazioni che definiscono l'equilibrio) da M a MT. La stessa impalcatura teorica e le stesse dimostrazioni di esistenza dell'equilibrio walrasiano potranno essere automaticamente applicate a questo caso.

Un metodo analogo si seguirà per trattare il fenomeno dell'incertezza: una stessa merce, disponibile in diversi stati del mondo, sarà considerata una merce diversa, a seconda dello stato del mondo s in

[7]Nella sezione successiva vedremo un'esempio di questa estensione

cui sarà disponibile; indicando con S il numero dei possibili stati del mondo, l'apposizione di un ulteriore indice a quantità e prezzi (x_{mts} e p_{mts}) porterà a un modello con MTS mercati, prezzi, ecc. Tutto ciò ha evidentemente qualche legame con la realtà (il prezzo del petrolio fra un anno in caso di guerra sarà diverso dal prezzo del petrolio oggi se non c'è la guerra), ma impone un insieme limitazioni all'analisi forse ancora più grandi di quelle che voleva eliminare: bisogna presupporre l'esistenza di mercati per tutte le merci in corrispondenza di tutti gli istanti temporali e di tutti gli stati del mondo considerati dall'analisi, un'ipotesi evidentemente irrealistica. A questo proposito è stata sviluppata dai teorici dell'equilibrio economico generale una vasta letteratura che analizza esplicitamente il caso di *incompletezza* dei mercati a termine; è questo un campo di analisi non del tutto esplorato, nel quale sono stati presentati diversi risultati economicamente interessanti, anche se la letteratura a questo riguardo è abbastanza complicata dal punto di vista analitico-formale.

Da ultimo i problema delle asimmetrie delle informazioni di cui dispongono i vari individui quando effettuano le loro scelte ha costituito e costituisce un fecondo campo di analisi della moderna teoria microeconomica.

2 Teoria marginalista aggregata della produzione e della distribuzione

Consideriamo in questa sezione la più semplice formulazione di un modello di equilibrio economico generale con produzione: si tratta di una costruzione originariamente concepita da John Bates Clark (1891) and (1899), successivamente rielaborata da von Bhm-Bawerk (1891), Wicksell (1893) and (1901), Ramsey (1928), Solow (1956) e tuttora utilizzato ampiamente in diverse "applicazioni" della teoria economica, quali la macroeconomia, la teoria dello sviluppo economico e l'economia internazionale.

2.1 Descrizione della tecnologia

Consideriamo un sistema economico nel quale si produce un solo bene, da intendersi in termini aggregati. Il lato della produzione è rappresentato da un'unica "grande" impresa, la cui tecnologia è rappresentata attraverso una "funzione aggregata di produzione"

$$Y = F(K, L),$$

dove Y indica la quantità di bene prodotta e K ed L indicano le quantità di capitale e di lavoro impiegate.[8]

Per la funzione F supponiamo che valgano le seguenti ipotesi:

(I.1) $F(K, L)$ è definita, continua e possiede derivate parziali prime e seconde continue per $K \geq 0$, $L \geq 0$; inoltre $F(0, 0) = F(K, 0) = F(0, L) = 0$ e $F(K, L) > 0$ per $K > 0$, $L > 0$;

(I.2) (a) $\dfrac{\partial F}{\partial K} > 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial L} > 0$;

(b) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ (si hanno cioè rendimenti *marginali* decrescenti di capitale e lavoro);

(I.3) F è omogenea di primo grado,[9] ossia $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ per ogni $\lambda > 0$; ciò implica rendimenti *di scala* costanti.

Grazie alla proprietà dei rendimenti di scala costanti è possibile esprimere la funzione di produzione in termini "intensivi": ponendo $\lambda = 1/L$ si ottiene:

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) =: f\left(\frac{K}{L}\right). \tag{5.15}$$

[8] L'aspetto peculiare di questa funzione aggregata di produzione è che essa contiene il fattore capitale, che è un fattore di produzione *prodotto* (a differenza del lavoro e della terra—che qui non è considerata—che sono fattori di produzione *originari*); esso è quindi fisicamente omogeneo al bene che viene prodotto; si vedrà più avanti che la considerazione del capitale alla stregua di un fattore di produzione originario è causa di diversi problemi di coerenza logica per la teoria marginalista della produzione e della distribuzione.

[9] Una funzione $y = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si dice *omogenea di grado s*, $s \in \mathcal{N}$, se $g(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^s g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ per ogni $\lambda \neq 0$.

Definiamo $y := Y/L$ prodotto per lavoratore e $k := K/L$ capitale per lavoratore; possiamo così ri-esprimere la funzione aggregata di produzione in termini pro-capite:

$$y = f(k). \tag{5.16}$$

L'andamento della funzione $f(k)$ dipende ampiamente dalle ipotesi fatte sulla funzione $F(K, L)$; in particolare possiamo dire che $f(k)$ è definita, continua e non-negativa per $k \geq 0$ e che $f(0) = 0$; inoltre poiché dalla (5.15) si ha $F(K, L) = Lf(K/L)$ si verifica che:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = Lf'\left(\frac{K}{L}\right)\frac{\mathrm{d}(K/L)}{\mathrm{d}K} = Lf'\left(\frac{K}{L}\right)\frac{1}{L} = f'(k)$$

e

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) = \frac{\partial}{\partial K}\left[f'\left(\frac{K}{L}\right)\right] = f''\left(\frac{K}{L}\right)\frac{\mathrm{d}(K/L)}{\mathrm{d}K} = f''(k)\frac{1}{L};$$

pertanto

$$f'(k) = \frac{\partial F}{\partial K} > 0 \quad \forall k \geq 0 \tag{5.17a}$$

e

$$f''(k) = L\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \quad \forall k \geq 0. \tag{5.17b}$$

Si osservi, da ultimo, che l'ipotesi di omogeneità di primo grado della funzione di produzione F implica che essa soddisfa il cosiddetto "teorema di Eulero",[10] espresso dalla seguente relazione:

$$Y \equiv \frac{\partial F}{\partial K}K + \frac{\partial F}{\partial L}L, \quad \forall K \geq 0, L \geq 0; \tag{5.18}$$

dividendo tale relazione per L e usando le relazioni prima introdotte si ottiene

$$f(k) - kf'(k) = \frac{\partial F}{\partial L}. \tag{5.19}$$

[10] Si veda Barozzi e Corradi (1985, pp. 404-405)

È possibile dare due rappresentazioni grafiche della tecnologia ora descritta. La prima mediante l'insieme delle curve di livello della funzione F, dette *isoquanti*:

$$F(K, L) = \bar{Y};$$

ciascuna di tali curve rappresenta l'insieme delle combinazioni di capitale e di lavoro che permettono di ottenere un dato livello di produzione, $\bar{Y}$. Finché non si conosce la forma funzionale di F non si è in grado di ottenere una forma esplicita per l'equazione del generico isoquanto. Tuttavia è possibile dedurre tre proprietà di cui godono in generale gli isoquanti a partire dalle ipotesi introdotte sulla funzione F: essi sono decrescenti, omotetici e convessi. Proviamo queste tre proprietà.

- *Isoquanti decrescenti.* Ricordiamo che la pendenza di ciascun isoquanto è misurata dal *saggio marginale di sostituzione tecnica* (SMST); esso è infatti il rapporto tra le variazioni delle quantità impiegate di due fattori che lasciano il prodotto invariato. Siamo però in grado di quantificare più precisamente tale grandezza: consideriamo una variazione congiunta della quantità impiegata di capitale e di lavoro. Nel caso di variazioni infinitesimali il prodotto varierà di un ammontare pari a

  $$\mathrm{d}Y = \frac{\partial F}{\partial K}\,\mathrm{d}K + \frac{\partial F}{\partial L}\,\mathrm{d}L.$$

  Lungo un isoquanto, per definizione, le variazioni di capitale e lavoro dovranno lasciare invariato il livello di prodotto; pertanto lungo un isoquanto dovrà essere $\mathrm{d}Y = 0$, cioè

  $$\frac{\partial F}{\partial K}\,\mathrm{d}K + \frac{\partial F}{\partial L}\,\mathrm{d}L = 0.$$

  Isolando il rapporto tra le variazioni di K e di L che lasciano invariato il livello del prodotto a $Y = \bar{Y}$ si ottiene che

  $$\left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}K}\right|_{Y=\bar{Y}} = -\frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L}; \tag{5.20}$$

  l'espressione alla sinistra del simbolo di uguale è il saggio marginale di sostituzione tecnica. La (5.20) dimostra che il saggio marginale di sostituzione tecnica viene a coincidere con l'opposto del rapporto fra le produttività marginali dei fattori. Poiché, come si è detto, esso misura l'inclinazione di ciascun isoquanto, grazie alle ipotesi (I.2)a e alla (5.20) si deduce che gli isoquanti sono *decrescenti*, in quanto

$$\text{SMST} \equiv \left.\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}K}\right|_{Y=\bar{Y}} < 0. \tag{5.21}$$

- *Isoquanti omotetici.* Considerando ora la (5.17a) e la (5.19), dalla (5.20) si ha:

$$\text{SMST} = -\frac{f'(k)}{f(k) - kf'(k)}; \tag{5.20$'$}$$

  Il saggio marginale di sostituzione tecnica dipende quindi solo dalle *proporzioni* fra capitale e lavoro impiegati, non dai loro livelli assoluti. Questa proprietà ha diverse conseguenze notevoli. Possiamo vedere subito la prima, che riguarda la forma degli isoquanti: poiché SMST misura la pendenza degli isoquanti si ha che la loro inclinazione rimane invariata se le proporzioni fra capitale e lavoro rimangono costanti (il che avviene lungo tutte le semirette uscenti dall'origine nello spazio (K, L)): gli isoquanti sono cioè *omotetici*.

- *Isoquanti convessi.* Dalla (5.20′) si ottiene

$$\frac{\mathrm{dSMST}}{\mathrm{d}k} = -\frac{f(k)f''(k)}{[f(k) - kf'(k)]^2} > 0; \tag{5.22}$$

  da ciò si vede che l'inclinazione degli isoquanti, che è negativa, aumenta al crescere della proporzione fra capitale e lavoro (cioè passando dalle semirette più inclinate a quelle meno inclinate nello spazio (K, L)): gli isoquanti sono pertanto *convessi*.

Essi hanno pertanto la forma indicata nella Figura 5.5.

L'insieme di tutti gli (infiniti) isoquanti fornisce una rappresentazione grafica nello spazio a due dimensioni (K, L) della tecnologia del sistema in esame.

Una rappresentazione grafica alternativa della tecnologia, sempre in uno spazio a due dimensioni, è fornita dalla funzione di produzione

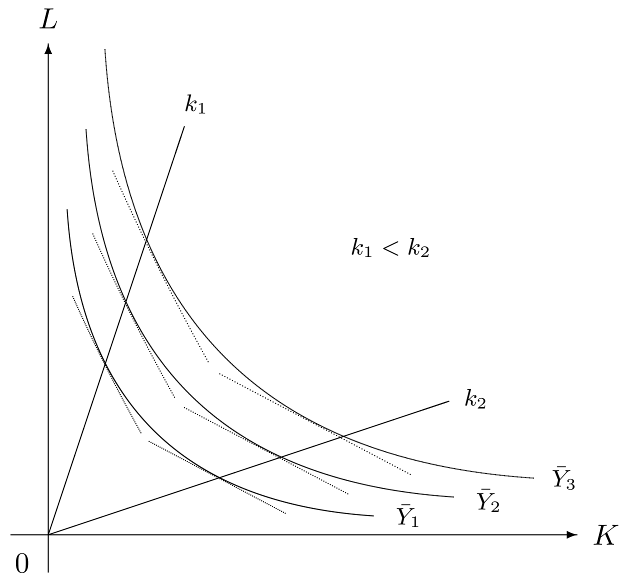


Figura 5.5: Isoquanti corrispondenti a tre diversi livelli di produzione

scritta in forma intensiva $y = f(k)$ (cfr. (5.16)): grazie alle (5.17) f ha un andamento del tipo di quello descritto dalla figura 5.6; da questo grafico si possono "leggere", per ogni dato valore $\hat{k}$ del rapporto capitale/lavoro, la produttività marginale del capitale, che, per la (5.17a), è misurata dall'inclinazione della funzione f nel punto $\hat{k}$, e la produttività marginale del lavoro, che, come il lettore può facilmente verificare per esercizio, è misurata dall'intercetta all'origine della retta tangente a f nel punto $k = \hat{k}$.

2.2 Scelta della tecnica di produzione

Fra tutte le (infinite) tecniche di produzione, si suppone che il sistema nel suo insieme agisca come un imprenditore che seleziona quella che massimizza l'extra-profitto, cioè la differenza fra il valore del prodotto e i costi di produzione, rappresentati dalle remunerazioni dei fattori di produzione, cioè profitti più salari. Tale tecnica è soluzione del seguente

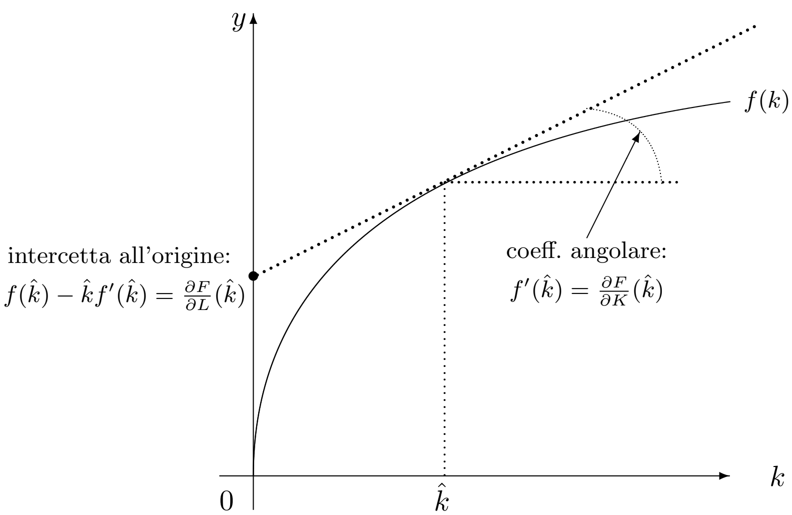


Figura 5.6: Funzione di produzione in termini pro-capite

problema di massimizzazione vincolata:

$$\max_{Y,K,L} pY - qK - wL, \quad \text{s.v.} \quad Y = F(K, L), \tag{5.23}$$

dove p indica il prezzo dell bene finale e q e w indicano, rispettivamente, il prezzo per l'uso del capitale e il prezzo del lavoro. Per l'ipotesi di concorrenza perfetta p, q e w sono considerati come dati in questo stadio dell'analisi. Sostituendo il vincolo nella funzione obiettivo si ottiene un problema di massimizzazione libera:

$$\max_{K,L} pF(K, L) - qK - wL. \tag{5.23'}$$

Prima di ottenere le condizioni del primo ordine del problema (5.23′) va osservato che l'ipotesi dei rendimenti di scala costanti comporta alcune conseguenze in relazione all'esistenza di un massimo per tale problema. Tale ipotesi infatti significa che è possibile espandere indefinitamente la scala di produzione mantenendo inalterate le proporzioni fra i fattori K ed L e il prodotto Y. Pertanto:

- se in corrispondenza di un dato sistema di prezzi p, q e w, è possibile individuare una combinazione K, L in corrispondenza della quale si conseguono extra-profitti positivi il sistema avrebbe convenienza a espandere indefinitamente la produzione; in questo caso non c'è soluzione al problema di massimizzazione dell'extra-profitto (matematicamente la soluzione sarebbe $K = +\infty$ e $L = +\infty$, ma tale situazione sarebbe insostenibile dal punto di vista economico, in quanto le risorse di capitale e lavoro sono limitate);

- alternativamente, se l'impresa conseguisse extra-profitti negativi non ci sarebbe una soluzione economicamente significativa, in quanto non sarebbe possibile remunerare i fattori col prodotto;

- l'unica possibilità perché il problema (5.23′) abbia una soluzione economicamente significativa è che gli extra-profitti siano nulli, cioè che
$$pF(K, L) = qK + wL. \tag{5.24}$$
Si noti che la nullità degli extra-profitti è una condizione che non è realizzata da ciascuno degli imprenditori, i quali ovviamente se potessero tenderebbero a realizzare profitti infiniti, ma dal "mercato": analiticamente cioè la (5.24) è una condizione che è realizzata attraverso la flessibilità dei prezzi (controllati dal mercato) e non attraverso l'aggiustamento delle quantità (controllate dagli imprenditori).

Premesso ciò mettiamoci nelle condizioni in cui il problema (5.23′) ha soluzione—supponiamo cioè che i prezzi p, q e w soddisfino la (5.24)—e scriviamo le condizioni del primo ordine di (5.23′):

$$p \cdot \frac{\partial F}{\partial K}(k) = q \tag{5.25a}$$

$$p \cdot \frac{\partial F}{\partial L}(k) = w, \tag{5.25b}$$

dove è stata evidenziata esplicitamente la dipendenza delle produttività marginali dei fattori dal *rapporto* fra capitale e lavoro anziché dai loro valori assoluti. Si osservi che il sistema (5.25) è costituito da due equazioni nella stessa incognita, k (i prezzi vanno considerati dati in questa fase dell'analisi in cui si descrive come gli imprenditori scelgono la tecnica di produzione). L'unica possibilità per cui il sistema (5.25) ammetta soluzioni è che le due equazioni siano dipendenti fra loro. E si può infatti dimostrare che ciò accade, proprio grazie al fatto che i prezzi p, q e w soddisfano la (5.24). Infatti la funzione di produzione F soddisfa il teorema di Eulero (eq. (5.18)). Combinando la (5.24) e la (5.18) si ottiene:

$$p \cdot \frac{\partial F}{\partial K} \cdot K + p \cdot \frac{\partial F}{\partial L} \cdot L = qK + wL. \tag{5.26}$$

Valutiamo ora la (5.26) in corrispondenza di un particolare valore del rapporto capitale/lavoro, k^*, in corrispondenza del quale una delle (5.25) sia verificata, supponiamo la (5.25a); per essa si ha:

$$p \cdot \frac{\partial F}{\partial K}(k^*) \equiv q. \tag{5.25a*}$$

La (5.26) pertanto si semplifica in $p \cdot \frac{\partial F}{\partial L}(k^*) \cdot L = wL$, cioè

$$p\frac{\partial F}{\partial L}(k^*) = w,$$

che è, appunto, la (5.25b); dunque le (5.25) non sono contraddittorie fra loro.

È nota l'interpretazione economica delle (5.25), le quali possono essere scritte nella forma alternativa:

$$\frac{\partial F}{\partial K}(k) = \frac{q}{p} \tag{5.25a$'$}$$

$$\frac{\partial F}{\partial L}(k) = \frac{w}{p}. \tag{5.25b$'$}$$

In una economia stazionaria e nel caso di deprezzamento nullo il rapporto q/p può essere visto come il saggio di rendimento del capitale o saggio di profitto: al tempo t il bene capitale viene acquistato al prezzo p_t; esso viene 'affittato' all'attività produttiva per il periodo fra t e $t+1$ al prezzo q_t; a fine periodo il bene capitale può essere 'rivenduto' a p_{t+1}; tenendo conto di un saggio di deprezzamento pari δ_t per il periodo t il saggio di rendimento di questo investimento sarà $\pi_t = \frac{q_t + [p_{t+1}(1-\delta_t) - p_t]}{p_t}$. In un'economia stazionaria si ha $p_{t+1} = p_t = p$ e $q_t = q$; se il deprezzamento è nullo ($\delta_t = 0$) il saggio di rendimento del capitale si riduce a q/p. Il rapporto w/p è invece il salario reale. Dalle (5.25′) si vede che se esiste una tecnica ottima essa è caratterizzata dall'*uguaglianza fra le produttività marginali di capitale e lavoro con il saggio di profitto e con il salario reale, rispettivamente.*

Dividendo le (5.25′) fra loro si ha:

$$-\frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L} \equiv \mathrm{SMST}(k) = -\frac{q}{w}. \tag{5.25''}$$

Poiché si è provato che SMST è una funzione monotona crescente di k si ottiene che la (5.25″) definisce una funzione *monotona e decrescente* fra k e q/w che esprime il noto fenomeno della "sostituzione" fra i fattori produttivi:

$$k = \phi\left(\frac{q}{w}\right) \quad \text{con} \quad \phi' < 0. \tag{5.25'''}$$

Le (5.25′), o la (5.25″) o la (5.25‴) definiscono, per ogni dato prezzo relativo dei fattori, q/w, il loro *rapporto* ottimo di impiego.

3 Funzioni di domanda e di offerta dei fattori

Finora, in cui sono state analizzate le scelte degli imprenditori, i prezzi p, q e w sono stati considerati come dati. Studiamo ora come essi vengono determinati. Dobbiamo cioè analizzare il mercato dei fattori e del bene; a tale scopo dobbiamo descrivere le funzioni di domanda e offerta dei fattori e del bene prodotto. Cominciamo dalle funzioni di domanda dei fattori.

Si è visto che, dati i prezzi dei fattori e del bene, le scelte individuali determinano le *proporzioni* con cui sono impiegati i fattori di produzione; il loro *livello* rimane indeterminato data l'ipotesi di rendimenti di scala costanti e la condizione di nullità degli extra-profitti. In altri termini dati p, q e w la (5.25‴) permette di conoscere il livello di impiego di un fattore una volta noto il livello di impiego dell'altro:

$$K = L \cdot \phi\left(\frac{q}{w}\right). \tag{5.25''''}$$

Sostituendo tale espressione nella funzione di produzione, grazie all'ipotesi di omogeneità di primo grado, si ottiene:

$$Y = F[L \cdot \phi\left(\frac{q}{w}\right), L] \equiv L \cdot F[\phi(q/w), 1],$$

da cui

$$L^d = Y \cdot \frac{1}{F[\phi(q/w), 1]} =: Y \cdot l^d(q/w), \tag{5.27a}$$

che è la *funzione di domanda di lavoro*. Sostituendo la (5.27a) nella (5.25'''') si ottiene:

$$K^d = Y \cdot \frac{1}{F[\phi(q/w), 1]} \cdot \phi(q/w) =: Y \cdot k^d(q/w), \tag{5.27b}$$

che è la *funzione di domanda di capitale*. Per le due funzioni di domanda così ottenute si può provare che[11]

$$\frac{\partial K^d}{\partial\left(\frac{q}{w}\right)} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L^d}{\partial\left(\frac{w}{q}\right)} < 0.$$

Esempio 2. (Ottenimento delle funzioni di domanda dei fattori) *Si supponga che la funzione aggregata di produzione sia di tipo Cobb-Douglas,* $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$*; la tecnica ottima è soluzione del problema*

$$\max_{K,L} pK^\alpha L^{1-\alpha} - qK - wL;$$

le condizioni del primo ordine sono:

$$p\alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} = q$$
$$p(1-\alpha)\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = w.$$

[11] Si ha, infatti, $\frac{\partial K^d}{\partial(q/w)} = Y \cdot \frac{\phi'(\cdot)\cdot F[\phi(\cdot),1] - \phi(\cdot)\cdot\frac{\partial F}{\partial K}\cdot\phi'(\cdot)}{[\text{den}]^2} = Y \cdot \frac{\phi'(\cdot)}{[\text{den}]^2} \cdot [F(k,1) - k \cdot \frac{\partial F}{\partial K}] = Y \cdot \frac{\phi'(\cdot)}{[\text{den}]^2} \cdot [f(k) - kf'(k)] < 0$ grazie alle (5.25'''), (5.15), (5.17a) e (5.19). La dimostrazione che $\frac{\partial L^d}{\partial(w/q)} < 0$ è lasciata al lettore per esercizio.

Dividendo membro a membro si ottiene $L = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{q}{w}K$*; sostituendo questa espressione di* L *nella funzione di produzione data ed esplicitando rispetto a* K *si ottiene la funzione di domanda del capitale*

$$K = Y \cdot \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{q}{w}\right)^{\alpha-1}.$$

Sostituendo questa espressione trovata per K *nella funzione di produzione aggregata si ottiene la funzione di domanda di lavoro:*

$$L = Y \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{q}{w}\right)^{\alpha}.$$

Il modo più semplice per costruire le funzioni di offerta dei fattori è quello di supporre che esse coincidano con le dotazioni di essi esistenti: le funzioni di offerta dei fattori sono dunque infinitamente rigide:

$$L^s = \bar{L}, \tag{5.28a}$$

$$K^s = \bar{K}. \tag{5.28b}$$

3.1 Funzioni di domanda e offerta del bene prodotto

Il bene prodotto viene domandato dagli individui che compongono il sistema in esame, che sono i capitalisti e i lavoratori. Poiché è l'unico bene esistente si suppone che essi spendano tutto il loro reddito per acquistarlo, dato da profitti e salari. Da ciò si ottiene la *funzione di domanda del bene prodotto*:

$$Y^d := (qK^s + wL^s)/p. \tag{5.29}$$

D'altra parte l'intero sistema produttivo offre il bene finale e domanda i fattori di produzione; la funzione di produzione, che sintetizza il legame tra queste grandezze, costituisce anche la *funzione di offerta del bene prodotto*:

$$Y^s := F(K^d, L^d). \tag{5.30}$$

3.2 Equilibrio generale - teoria della distribuzione

Abbiamo ora tutte le funzioni necessarie per definire l'equilibrio generale dei mercati:

$$L^d := Y^s \cdot l^d(q/w) \qquad \text{(eq. (5.27a))}$$
$$L^s := \bar{L} \qquad \text{(eq. (5.28a))}$$
$$L^d = L^s \tag{5.31}$$
$$K^d := Y^s \cdot k^d(q/w) \qquad \text{(eq. (5.27b))}$$
$$K^s := \bar{K} \qquad \text{(eq. (5.28b))}$$
$$K^d = K^s \tag{5.32}$$
$$Y^d := (qK^s + wL^s)/p \qquad \text{(eq. (5.29))}$$
$$Y^s := F(K^d, L^d) \qquad \text{(eq. (5.30))}$$
$$Y^d = Y^s. \tag{5.33}$$

Sostituendo le (5.27a) e (5.28a) nella (5.31), le (5.27b) e (5.28b) nella (5.32), la (5.28) nelle (5.29) e (5.30), sostituendo poi queste ultime nella (5.33) e definendo $\bar{Y} = F(\bar{K}, \bar{L})$ il sistema che definisce l'equilibrio generale si riduce a

$$\bar{Y} \cdot l^d(q/w) = \bar{L} \tag{5.34a}$$
$$\bar{Y} \cdot k^d(q/w) = \bar{K} \tag{5.34b}$$
$$(q\bar{K} + w\bar{L})/p = \bar{Y}. \tag{5.34c}$$

(5.34) è un sistema di tre equazioni in tre incognite, q, w e p. Tuttavia le prime due sono due equazioni nella stessa incognita, q/w e si può verificare che esse coincidono.[12] Quindi l'intero sistema (5.34) viene ad

[12] Esse infatti sono riconducibili alla stessa equazione; sia $\bar{k} = \bar{K}/\bar{L}$; ricordando le definizioni di $\ell^d(\cdot)$ e di $k^d(\cdot)$ (cfr. equazioni (5.27)), usando l'ipotesi (I.3) e valutando le (5.34a) e (5.34b) in corrispondenza di $k = \bar{k}$ si ha:

$$\text{(5.34a)}: \quad \bar{Y} \cdot \frac{1}{F(\bar{k},1)} = L \quad \Leftrightarrow \quad \bar{Y} = \bar{L} \cdot F(\bar{k},1) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{Y} = F(\bar{K},\bar{L});$$

essere composto da due equazioni indipendenti in tre incognite; si ha pertanto un grado di libertà che, al solito, può essere chiuso fissando un prezzo pari a 1. Fisseremo

$$p = 1, \tag{5.35}$$

esprimendo così il prezzo d'uso del capitale e del lavoro in termini del bene prodotto. Sotto le ipotesi (I.1)-(I.3) (più qualche ulteriore ipotesi "tecnica" sul comportamento della funzione di produzione agli estremi del campo di esistenza) si può dimostrare che il sistema (5.34) ammette sempre una soluzione economicamente significativa; esistono cioè dei prezzi relativi non-negativi che garantiscono l'equilibrio fra domanda e offerta su tutti i mercati.

Si noti da ultimo che data la tecnologia e date le dotazioni dei fattori rimane univocamente determinato l'ammontare massimo del bene finale producibile, $\bar{Y} = F(\bar{K}, \bar{L})$); d'altra parte profitti e salari sono determinati dalle produttività marginali, rispettivamente, di capitale e lavoro. Avendo introdotto due principî indipendenti di determinazione delle variabili distributive è necessario verificare se la quantità di bene finale prodotta, $\bar{Y}$, è sufficiente a remunerare capitale e lavoro in base a tali principî. L'ipotesi che la tecnologia abbia rendimenti di scala costanti assicura che accada ciò, in quanto essa comporta che la funzione di produzione sia omogenea di primo grado; F, pertanto, soddisfa il teorema di Eulero,[13] in base al quale vale la seguente identità:

$$Y \equiv \frac{\partial F}{\partial K} K + \frac{\partial F}{\partial L} L, \quad \forall K \geq 0, L \geq 0. \tag{5.36}$$

Considerando che le produttività marginali dei fattori sono uguali a profitti e salari espressi in termini di bene finale (equazioni (5.25)$'$) si ha che

$$pY \equiv qK + wL \quad \forall K \geq 0, L \geq 0,$$

cioè che il valore del bene prodotto è esattamente sufficiente a pagare i fattori in base alle rispettive produttività marginali: l'extra-profitto è

(5.34b) : $\quad \bar{Y} \cdot \dfrac{\bar{k}}{F(\bar{k}, 1)} = \bar{k} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{Y} = \bar{K} \dfrac{F(\bar{k}, 1)}{\bar{k}} = \bar{K} \cdot F\left(1, \dfrac{1}{\bar{k}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{Y} = F(\bar{K}, \bar{L}).$

[13] Si veda Barozzi e Corradi (1985, pp. 404-405)

nullo. Tale proprietà, nota come "legge di esaurimento del prodotto", è stata evidenziata da Wicksteed (1894). Si noti a questo proposito l'importante ruolo giocato dall'ipotesi dell'omogeneità di primo grado della funzione di produzione nella teoria neoclassica della distribuzione.

Esempio 3. (Calcolo dell'equilibrio walrasiano) *Si supponga che le funzioni di domanda dei fattori siano quelle ottenute nell'Esempio 2 e inoltre si supponga che* $\alpha = 1/2$*; si ha così:*

$$K^d = Y \cdot \left(\frac{q}{w}\right)^{-1/2} \quad e \quad L^d = Y \cdot \left(\frac{q}{w}\right)^{1/2};$$

supponiamo poi che le funzioni di offerta di capitale e lavoro siano:

$$K^s = 4500 \quad e \quad L^s = 500.$$

L'equilibrio dei mercati si ha quando:

$$Y \cdot \left(\frac{q}{w}\right)^{-1/2} = 4500$$

$$Y \cdot \left(\frac{q}{w}\right)^{1/2} = 500$$

Risolvendo il sistema rispetto a π/w *e rispetto a* Y *si ha* $\pi/w = 1/9$ *e* $Y = 1500$.

3.3 Rappresentazione grafica dell'equilibrio

È possibile dare due rappresentazioni grafiche alternative dell'equilibrio del sistema a partire dalle rappresentazioni della tecnologia date nelle figure 5.5 e 5.6. Cominciamo dalla prima.

L'emergere di questo sistema di prezzi relativi d'equilibrio generale si può vedere rappresentando la condizione (5.25″) congiuntamente alle (5.28) (si veda la figura 5.7). Poiché in equilibrio si ha la piena occupazione dei fattori, il punto di equilibrio è individuato dal punto di coordinate $(\bar{K}, \bar{L})$. Per esso passerà sicuramente un isoquanto, la cui inclinazione in quel punto determinerà—attraverso la (5.25″)—il prezzo relativo dei fattori, $(q/w)_0$.

Consideriamo ora la rappresentazione della tecnologia in termini procapite (vedi figura 5.6): la perfetta flessibilità dei prezzi garantisce, come

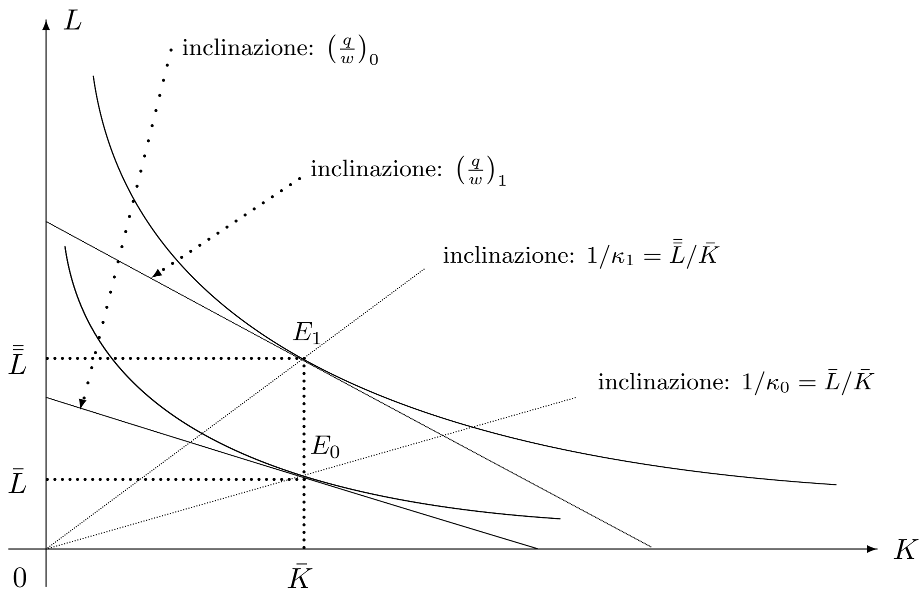


Figura 5.7: Equilibrio sul mercato dei fattori

detto, la piena occupazione dei fattori; essi pertanto saranno "assorbiti" dal sistema produttivo nella proporzione in cui si trovano a essere disponibili, cioè $\bar{k} = \bar{K}/\bar{L}$. Il prezzi dei fattori che garantiscono il loro pieno impiego in queste proporzioni potranno essere "letti" tenendo conto della (5.17a) e della (5.19): grazie ad esse e alla (5.35) le condizioni del primo ordine (5.25) per individuare la tecnica ottima valutate in corrispondenza dell'equilibrio assumono la forma:

$$(q/p)_0 = f'(\bar{k}) \tag{5.37a}$$

$$(w/p)_0 = f(\bar{k}) - \bar{k}f'(\bar{k}). \tag{5.37b}$$

Pertanto il saggio di profitto di equilibrio sarà misurato dalla pendenza della retta tangente alla funzione di produzione nel punto $k = \bar{k}$ (equazione (5.37a)) e il salario di equilibrio dall'intercetta all'origine della stessa retta (equazione (5.37b)).

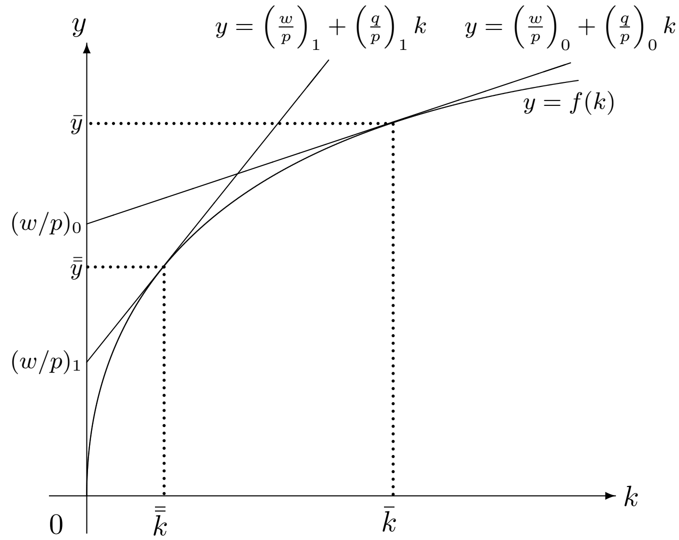


Figura 5.8: Equilibrio generale

3.4 Statica comparata

Le due precedenti raffigurazioni permettono immediatamente di vedere cosa accade se dovesse variare uno dei dati del nostro modello. Supponiamo per esempio che la dotazione di capitale rimanga invariata a $\bar{K}$, mentre la dotazione di lavoro passi da $\bar{L}$ a $\bar{\bar{L}}(> \bar{L})$. Dalla figura 5.7 si vede che l'aumento della dotazione di lavoro richiede un mutamento della tecnica produttiva adottata (si passa dal punto E_0 al punto E_1) che permetta l'assorbimento totale delle "nuove" dotazioni di fattori produttivi, $\bar{K}$ e $\bar{\bar{L}}$; a tale scopo i prezzi dei fattori devono variare fino a eguagliare il saggio marginale di sostituzione tecnica nel nuovo punto E_1 di coordinate $(\bar{K}, \bar{\bar{L}})$. Il nuovo prezzo relativo del lavoro rispetto al capitale è misurato dall'inclinazione dell'isoquanto nel punto E_1. Un aumento della dotazione di lavoro induce dunque un aumento del prezzo relativo del capitale rispetto al lavoro, $(q/w)_1 > (q/w)_0$, che rende conveniente l'adozione di una tecnica a maggior intensità di lavoro: $\kappa_1 \equiv \bar{K}/\bar{\bar{L}} < \bar{K}/\bar{L} \equiv \kappa_0$. Si ha dunque una *relazione monotonica* *e inversa* fra il prezzo relativo del capitale rispetto al lavoro q/w, e il rapporto di impiego di capitale e lavoro $\kappa := K/L$. La monotonicità inversa di tale relazione esprime il cosiddetto fenomeno della *sostituzione* tra capitale e lavoro.

È possibile pervenire alla stessa conclusione a partire dalla Figura 5.8. Confrontiamo ancora le conseguenze del cambiamento nelle dotazioni prima indicato: si passa dal punto $(\bar{k}, \bar{y})$ al punto $(\bar{\bar{k}}, \bar{\bar{y}}) < (\bar{k}, \bar{y})$; questo movimento lungo la funzione di produzione definisce un nuovo sistema di prezzi dei fattori, $(q/p)_1 > (q/p)_0$ e $(w/p)_1 < (w/p)_0$. A fronte un aumento della dotazione di lavoro il sistema reagisce riducendo il salario unitario e aumentando il saggio di profitto, così da rendere conveniente una *sostituzione* di capitale con lavoro che assicuri nuovamente la piena occupazione dei fattori.

3.5 Il problema della misurazione del capitale (cenni)

Le nitide ed ottimistiche conclusioni del modello appena presentato sono state ottenute con riferimento a un sistema economico in cui è presente un solo bene prodotto e impiegato come bene capitale. È evidentemente necessario verificare se tali conclusioni possono essere estese a un sistema più generale, nel quale sono prodotti più beni capitale. Si può vedere immediatamente, però, in tale generalizzazione si pone il problema di come misurare il capitale.[14] Infatti per poter esprimere attraverso un'unica variabile K la quantità di capitale impiegata (cioè il primo argomento della funzione di produzione) così come la quantità di capitale disponibile nell'economia $(\bar{K})$ è necessario esprimere tali grandezze *in valore*. Ciò però richiede la conoscenza dei prezzi delle singole merci usate come beni capitale, il che, a sua volta, richiede la conoscenza preliminare dei profitti e/o del saggio di profitto, che sono appunto le grandezze che

[14]Per il fattore lavoro tale problema è meno rilevante in quanto si può accettare, almeno in prima approssimazione, l'ipotesi che le unità di lavoro offerte da ciascun lavoratore siano fra loro uniformi, così da poter essere aggregate in un unica variabile L (ove ciò non sia possibile, ad esempio per la presenza di differenze di abilità, si potrebbero applicare all'unità di lavoro offerta da ciascun lavoratore dei coefficienti di conversione con lo scopo di rendere le ore di ciascun lavoratore fisicamente sommabili fra loro).

il modello deve determinare.[15] Ci troviamo così in una situazione di "circolarità" logica analoga a quella riscontrata nella teoria ricardiana. Tale problema, che è stato esplicitato chiaramente solo verso la metà del secolo scorso[16], era stato intuito da alcuni dei primi autori marginalisti. Ad esempio von Bhm-Bawerk (1891) e Wicksell (1893) e (1901) hanno tentato di esprimere il capitale attraverso il periodo (medio) di produzione: includendo in tale periodo oltre al tempo necessario a produrre il bene o i beni da destinare all'uso finale anche il *tempo* necessario a costruire tutti i beni capitale impiegati nel processo di produzione (cioè i beni capitale impiegati nel processo stesso, i beni capitale impiegati per produrre i suddetti beni capitale, i beni capitale impiegati per produrre i beni capitale impiegati per produrre i beni capitale ... e così via) si può intuire che tanto più "lungo" è tale periodo di produzione, tanto più tempo è stato speso per produrre i beni capitale. Pertanto tanto più lungo è il periodo di produzione tanto maggiore sarà la "quantità di capitale" impiegata rispetto al lavoro. In questo modo si riesce a esprimere l'aggregato eterogeneo dei diversi beni capitale mediante una grandezza unidimensionale. È stato però dimostrato (si veda, ad esempio, Garegnani (1960, parte seconda)) che anche questa modalità di misurare il capitale non è indipendente dal saggio di profitto, salvo casi particolari.

Esiste un'ulteriore modalità con cui è stato introdotto il capitale nello schema neoclassico di produzione: è quella proposta da Walras (1874) nella sua formulazione del modello di equilibrio economico generale. In tale schema il capitale entra in termini *disaggregati*: ciascuna merce m impiegata come bene capitale può essere così espressa in termini fisici, K_m; di ciascuna merce si supporrà che esiste una dotazione iniziale, $\bar{K}_m$, anch'essa espressa in termini fisici; le equazioni di domanda e offerta delle varie merci e servizi saranno così in grado di determinare un prezzo q_m per l'*uso* di tale bene capitale e un prezzo p_m per l'*acquisto* della stessa, $m = 1, \ldots, M$. Vi è però un problema, che è stato evidenziato da Garegnani (1960, parte seconda): i prezzi q_m e p_m saranno determinati

[15] Alternativamente sarebbe possibile calcolare il valore del capitale attualizzando il flusso dei guadagni futuri; ma per compiere questa operazione è richiesta la conoscenza del tasso di interesse, che nel caso del sistema qui esaminato non potrebbe che coincidere col saggio di profitto.

[16] Cfr. Robinson (1953–54) e Garegnani (1960).

in modo da equilibrare, per ciascun bene capitale, rispettivamente, la domanda e l'offerta del bene capitale "in affitto" e la domanda e l'offerta del bene capitale stesso; i prezzi così determinati *non* saranno in grado, salvo che per una pura coincidenza, di soddisfare anche la condizione di uniformità dei saggi di rendimento sui diversi beni capitale:

$$\frac{q_1}{p_1} = \cdots = \frac{q_m}{p_m} = \cdots = \frac{q_M}{p_M}; \tag{5.38}$$

una situazione in cui tali saggi non sono uniformi non è però compatibile con una situazione di equilibrio concorrenziale: essa infatti darebbe luogo a possibili arbitraggi attraverso i quali sarebbe possibile guadagnare extra-profitti positivi scambiando opportunamente le dotazioni di capitale a disposizione di ciascun possessore. Formalmente si tratta di un problema di sovra-determinazione del modello: ai prezzi verrebbe infatti assegnata una duplice funzione, quella di uguagliare domanda e offerta in ciascun mercato e quella di rendere uniformi i saggi di profitto; quando essi compiono una di queste funzioni non sono poi in grado, salvo eccezioni, di compiere anche l'altra. Intuitivamente si può cogliere che l'uniformità fra questi saggi di rendimento potrebbe realizzarsi solo se fosse possibile determinare, assieme alle altre variabili endogene del modello, la *composizione* del capitale del sistema (cioè le proporzioni fra i diversi beni capitale); ma tale possibilità è in manifesto contrasto con il paradigma dell'analisi neoclassica, per il quale le dotazioni di beni capitale dell'economia devono essere considerate come date.[17]

Una possibile "scappatoia" a questo problema è quella che si trova nei modelli di equilibrio economico generale intertemporale: nel calcolo del saggio uniforme di profitto anziché rapportare i prezzi per l'affitto di ciascun bene capitale m al tempo t, q_{mt} al prezzo di riproduzione dello stesso bene nello stesso periodo, p_{mt}, si impone che la suddetta uniformità sia realizzata sui saggi di rendimento calcolati sui prezzi di

[17] Si può dimostrare che anche se si considerassero le dotazioni dei diversi beni capitale come incognite sarebbe però necessario considerare come dato il valore totale del capitale dell'intero sistema; ciò inevitabilmente riaprirebbe i problemi di "circolarità" logica prima evidenziati (per ulteriori approfondimenti si veda Garegnani (1960, parte seconda)).

riproduzione dei *nuovi* beni capitale:

$$\frac{q_{1t}}{p_{1,t+1}} = \cdots = \frac{q_{mt}}{p_{m,t+1}} = \cdots = \frac{q_{Mt}}{p_{M,t+1}}.$$

Questa soluzione, introducendo M incognite aggiuntive, i prezzi di produzione dei nuovi beni, $p_{m,t+1}$, risolve il problema di sovra-determinazione prima evidenziato. Il problema è però risolto solo dal punto di vista formale, in quanto questa reinterpretazione del modello walrasiano conduce inevitabilmente l'analisi in un contesto di equilibrio *intertemporale*: al di là della natura radicalmente diversa dell'equilibrio così ottenuto[18] ci troviamo in una situazione nella quale la determinazione dei prezzi d'equilibrio di un determinato periodo richiede la determinazione dei prezzi d'equilibrio del periodo successivo e, se esistono più periodi, di *tutti* i periodi successivi! Ciò significa che gli agenti devono prendere *tutte* le loro decisioni, presenti e future, *nello stesso istante iniziale*: più che un modello sembra una caricatura dell'economia! La coerenza logica è salva, ma al prezzo di un totale scollamento del modello dalla realtà.

[18] Un'analisi di questo cambiamento di prospettiva dell'analisi di equilibrio economico generale è stata proposta da Garegnani (1976).

Parte III

Ripresa dell'economia politica classica

Capitolo 8

Lo schema teorico di Sraffa

1 Introduzione

Nella proposizione introduttiva della prefazione a *Produzione di merci a mezzo di merci* Sraffa scrive:

> Chiunque sia avvezzo a pensare in termini di equilibrio fra la domanda e l'offerta può essere indotto, nel leggere queste pagine, a supporre che si sia inteso limitare l'argomento al caso di industrie a rendimenti costanti. Se tale supposizione può riuscire di qualche aiuto, non c'è nessun male a che il lettore l'adotti come temporanea ipotesi di lavoro. In realtà, però, l'argomento non comporta alcuna limitazione del genere. Non viene qui considerato alcun cambiamento nel volume della produzione e neppure [...] alcun cambiamento nelle proporzioni in cui i diversi mezzi di produzione sono usati in ciascuna industria, così che la questione se i rendimenti siano costanti o variabili non sorge nemmeno. L'indagine riguarda esclusivamente quelle proprietà di un sistema economico che sono indipendenti da variazione nel volume della produzione e nelle proporzioni tra i «fattori» impiegati. Sraffa (1960, p. v)

2 Produzione di sussistenza

Consideriamo un caso estremamente semplificato di una società primitiva che produce esattamente quanto è necessario a mantenere se stessa. Ciascuna merce è prodotta da una specifica industria (si ha dunque produzione singola). Le merci sono scambiate tra loro in un mercato che si svolge alla fine dei processi di produzione (che si suppongono della stessa durata).

2.1 Esempio numerico con due prodotti

Supponiamo che esistano, per semplicità, due merci e due industrie; le merci sono entrambe usate in parte come sostentamento dei lavoratori e in parte come mezzi di produzione. Supponiamo che si osservino le seguenti relazioni interindustriali:

Industria del grano	Industria del ferro		Merci usate come mezzi di produzione
18 q. di grano	4 q. di grano	=	22 q. di grano
6 t. di ferro	4 t. di ferro	=	10 q. di ferro
↓	↓		
22 q. di grano	10 t. di ferro		

Come si vede non c'è sovrappiù: nel sistema nel suo insieme si impiegano 22 q. di grano e 10 t. di ferro e si producono esattamente 22 q. di grano e 10 t. di ferro. Affinché questo processo possa rinnovarsi di periodo in periodo è necessario che le merci vengano scambiate sul mercato in base a un particolare prezzo relativo, che possiamo così calcolare:

$$p_1 \cdot 18 + p_2 \cdot 6 = p_1 \cdot 22$$
$$p_1 \cdot 4 + p_2 \cdot 4 = p_2 \cdot 10.$$

Si è così ottenuto un sistema omogeneo di due equazioni in due incognite; le due equazioni sono però linearmente dipendenti; è dunque possibile trovare (infinite) soluzioni *non banali*, $p_1 = (3/2)p_2$, che definiscono il prezzo relativo fra le due merci. Inoltre le soluzioni trovate sono *positive*.

Tutto ciò non è un caso; è una conseguenza del fatto che il sistema si trova esattamente in *stato reintegrativo*.

Possiamo generalizzare l'analisi al caso di M merci: le equazioni dei prezzi diventano:

$$\begin{cases} p_1 q_{11} + \cdots + p_m q_{m1} + \cdots + p_M q_{M1} = p_1 q_1 \\ \vdots \\ p_1 q_{1i} + \cdots + p_m q_{mi} + \cdots + p_M q_{Mi} = p_i q_i \\ \vdots \\ p_1 q_{1M} + \cdots + p_m q_{mM} + \cdots + p_M q_{MM} = p_M q_M. \end{cases} \tag{8.1}$$

e le condizioni di stato reintegrativo sono:

$$\begin{cases} q_{11} + \cdots + q_{1i} + \cdots + q_{1M} = q_1 \\ \vdots \\ q_{m1} + \cdots + q_{mi} + \cdots + q_{mM} = q_m \\ \vdots \\ q_{M1} + \cdots + q_{Mi} + \cdots + q_{MM} = q_M. \end{cases} \tag{8.2}$$

Siano

$$a_{mi} := \frac{q_{mi}}{q_i}, \quad m, i = 1, \ldots, M = I,$$

i coefficienti tecnici di produzione (a_{mi} indica la quantità di merce m mediamente impiegata nella produzione di merce i). Scegliendo una unità di misura per ciascuna merce in modo tale che risulti $q_1 = \cdots = q_m = \cdots = q_M = 1$, cosicché

$$a_{mi} = q_{mi}, \quad m, i = 1, \ldots, M = I,$$

il sistema dei prezzi (8.1) e le condizioni di stato reintegrativo (8.2) diventano:

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + \cdots + p_m a_{m1} + \cdots + p_M a_{M1} = p_1 \\ \vdots \\ p_1 a_{1i} + \cdots + p_m a_{mi} + \cdots + p_M a_{Mi} = p_i \\ \vdots \\ p_1 a_{1M} + \cdots + p_m a_{mM} + \cdots + p_M a_{MM} = p_M. \end{cases} \tag{8.3}$$

e le condizioni di stato reintegrativo sono:

$$\begin{cases} a_{11} + \cdots + a_{1i} + \cdots + a_{1M} = 1 \\ \vdots \\ a_{m1} + \cdots + a_{mi} + \cdots + a_{mM} = 1 \\ \vdots \\ a_{M1} + \cdots + a_{Mi} + \cdots + a_{MM} = 1. \end{cases} \tag{8.2$'$}$$

In forma compatta (8.3) diventa:

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T\mathbf{A}, \quad \text{cioè} \quad \mathbf{p}^T(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{o}^T \tag{8.3$'$}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mM} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{Mi} & \cdots & a_{MM} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix}.$$

Esistenza delle soluzioni. La condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema lineare omogeneo (8.3′) abbia soluzioni non-banali è

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0,$$

Essa è soddisfatta se e solo se $\mathbf{A}$ possiede un autovalore pari a 1. In tal caso un'equazione viene ad essere linearmente dipendente dalle altre e, di conseguenza, un'incognita dovrà essere determinata esogenamente al sistema (8.3′). Fissando pari a 1 il prezzo di una qualunque merce, quest'ultima costituirà il numerario del sistema dei prezzi.

Positività delle soluzioni. Poiché il sistema si trova in stato reintegrativo (cfr. equazioni (8.2′)), le somme delle righe della matrice $\mathbf{A}$ sono tutte pari a 1. Pertanto grazie al risultato n. 6 dei teoremi di Perron-Frobenius, il numero 1, oltre a essere un autovalore della matrice $\mathbf{A}$, è anche l'autovalore di modulo massimo di $\mathbf{A}$, cioè $\lambda^* = 1$; ciò basta per garantire, grazie al risultato n. 2 dei teoremi di Perron-Frobenius, che la soluzione di (8.3′) è positiva.

3 Produzione con sovrappiù

3.1 Sovrappiù percepito esclusivamente dai capitalisti

Nel caso (più generale) di produzione con sovrappiù una o più merci sono prodotte in quantità superiore alla quantità di esse immesse. Cominciamo a esaminare un esempio numerico ottenuto aumentando la quantità di grano prodotta, da 22 quintali a 30 quintali, e lasciando invariate tutte le altre quantità. Le relazioni intersettoriali saranno allora:

Industria del grano	Industria del ferro		Merci usate come mezzi di produzione	Sovrappiù
18 q. di grano	4 q. di grano	=	22 q. di grano (< 30)	8
6 t. di ferro	4 t. di ferro	=	10 q. di ferro	0
↓	↓			
30 q. di grano	10 t. di ferro			

In tal caso le equazioni che determinano i prezzi delle merci vanno ripensate: se usassimo le vecchie equazioni, anche se opportunamente modificate,

$$p_1 \cdot 18 + p_2 \cdot 6 = p_1 \cdot 30$$
$$p_1 \cdot 4 + p_2 \cdot 4 = p_2 \cdot 10.$$

sommandole si otterrebbe una contraddizione:

$$p_1 \cdot 30 + p_2 \cdot 10 = p_1 \cdot 22 + p_2 \cdot 10.$$

Tale difficoltà non può essere superata immaginando di distribuire il sovrappiù—che in questo contesto coincide col profitto—*prima* che i prezzi siano determinati, in quanto tale profitto deve essere distribuito in proporzione ai mezzi di produzione che sono stati anticipati in ciascuna industria (capitale), e tale distribuzione presuppone dunque che siano noti i prezzi delle merci usate come mezzi di produzione. D'altra parte non si può ripartire il sovrappiù *dopo* che i prezzi siano stati determinati, in quanto per conoscere i prezzi bisogna conoscere il saggio di profitto. È così che la ripartizione del sovrappiù (e quindi il calcolo del saggio di profitto) e la determinazione dei prezzi delle merci deve essere simultanea:

$$\begin{aligned} (p_1 \cdot 18 + p_2 \cdot 6)(1+\pi) &= p_1 \cdot 30 \\ (p_1 \cdot 4 + p_2 \cdot 4)(1+\pi) &= p_2 \cdot 10, \end{aligned}$$

dove π è il saggio di profitto. Più in generale, scegliendo ancora l'unità di misura di ciascuna merce in maniera tale che $q_1 = \cdots = q_m = \cdots = q_M = 1$, cosicché $a_{mi} = q_{mi}, \quad m, i = 1, \ldots, M = I$, le equazioni diventano:

$$\begin{cases} (p_1 a_{11} + \cdots + p_m a_{m1} + \cdots + p_M a_{M1})(1+\pi) = p_1 \\ \vdots \\ (p_1 a_{1i} + \cdots + p_m a_{mi} + \cdots + p_M a_{Mm})(1+\pi) = p_i \\ \vdots \\ (p_1 a_{1M} + \cdots + p_m a_{mM} + \cdots + p_M a_{MM})(1+\pi) = p_M, \end{cases} \tag{8.4}$$

che sono equivalenti a:

$$\begin{cases} \mathbf{p}^T \mathbf{a}_1(1+\pi) = p_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T \mathbf{a}_m(1+\pi) = p_m \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T \mathbf{a}_M(1+\pi) = p_M, \end{cases} \tag{8.4$'$}$$

oppure a

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A}(1+\pi) = \mathbf{p}^T, \tag{8.4$''$}$$

dove $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_M \end{bmatrix} = \mathbf{A}$.

Si può osservare che le condizioni di esistenza di un sovrappiù—che grazie alla scelta dell'unità di misura delle quantità prodotte assumono la forma

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1M} \leq 1 \\ \vdots \\ a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mM} \leq 1 \\ \vdots \\ a_{M1} + a_{M2} + \cdots + a_{MM} \leq 1, \end{cases} \tag{8.5}$$

—impongono sulla matrice $\mathbf{A}$ la restrizione che tutte le somme per riga non siano superiori a 1. Poiché l'autovalore di modulo massimo di una matrice quadrata non-negativa è compreso tra la minima e la massima delle somme per riga (cfr. risultato n. 6 dei teoremi di Perron-Frobenius), le (8.5) implicano che l'autovalore di modulo massimo di $\mathbf{A}$, λ^*, soddisfi la condizione

$$\lambda^* \leq 1, \tag{8.6}$$

che viene detta «condizione di vitalità» del sistema.

Esistenza e positività delle soluzioni. Ponendo

$$\lambda := \frac{1}{1+\pi} \tag{8.7}$$

il sistema (8.4″) può essere scritto nella forma:

$$\mathbf{p}^T\mathbf{A} = \lambda\mathbf{p}^T, \tag{8.4‴}$$

che è il sistema degli autovettori sinistri di $\mathbf{A}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché tale sistema abbia soluzioni non-banali è che

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0; \tag{8.8}$$

la (8.8), è l'equazione caratteristica di $\mathbf{A}$. Essa ha, in generale, M soluzioni, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \ldots, \lambda_M$, a ciascuna delle quali corrisponde un vettore soluzione di (8.4‴). Fra essi però selezioniamo l'autovalore di modulo massimo, λ^*, in quanto si sa che ad esso è sicuramente associato un autovettore sinistro semi-positivo, $\mathbf{p}^T \geq \mathbf{o}^T$, (positivo, $\mathbf{p}^T > \mathbf{o}^T$, se $\mathbf{A}$ è indecomponibile). Avendo determinato $\lambda = \lambda^*$ rimane determinato, grazie alla (8.7), il saggio di profitto,

$$\pi = \Pi := \frac{1}{\lambda^*} - 1. \tag{8.9}$$

Poiché ci interessano valori non-negativi del saggio massimo di profitto bisogna imporre:

$$\Pi \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^* \leq 1,$$

che coincide con la (8.6): la condizione per l'esistenza di un sovrappiù non-negativo coincide dunque con la condizione di non-negatività del saggio di profitto (ciò non stupisce in quanto in questo contesto sovrappiù e profitto coincidono).

Prodotti base e prodotti non-base. Nel caso analizzato nella sezione 2, dove non c'era un sovrappiù, tutte le merci prodotte erano anche mezzi di produzione (non venivano prodotte merci che non fossero anche mezzi di produzione): ciascuna merce entrava direttamente o indirettamente (cioè come mezzo di produzione di qualche mezzo di produzione) nella produzione delle altre. Si considerino, ad esempio, due sistemi alternativi di produzione le cui tecniche sono rappresentate dalle due seguenti matrici di coefficienti tecnologici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Nella tecnica rappresentata dalla matrice **A** ciascuna merce entra sia direttamente che indirettamente nella produzione dell'altra. Nel caso della tecnica rappresentata dalla matrice **B** osserviamo la prima industria: in essa entra direttamente solo la merce 2 come mezzo di produzione; tuttavia, poiché un'unità di quest'ultima è prodotta utilizzando anche b_{12} unità di merce 1 si ha che la merce 1, pur non entrando direttamente nella produzione di se stessa, vi entra indirettamente.

In tutti i casi (come quelli dei sistemi **A** e **B**) in cui ciascuna merce entra direttamente o indirettamente nella produzione di tutte le altre, ciascuna merce ha una sua funzione nella determinazione di tutti i prezzi.

Nel caso di produzione con sovrappiù c'è però spazio per una nuova classe di «merci di lusso», che non vengono usate né come mezzi di produzione né come mezzi di sussistenza per la produzione di altre merci. Queste merci non hanno alcun ruolo nella determinazione dei prezzi delle altre merci e del saggio di profitto. Infatti, in tal caso la matrice dei coefficienti si presenterebbe nella forma:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{oppure, in generale,} \quad \underset{(M,M)}{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \underset{(k,k)}{\mathbf{D}_{11}} & \underset{(k,M-k)}{\mathbf{D}_{12}} \\ \underset{(M-k,k)}{\mathbf{O}} & \underset{(M-k,M-k)}{\mathbf{O}} \end{bmatrix},$$

la merce 1 (nel sistema **C**) o le prime k merci (nel sistema **D**) entrano nella produzione di tutte le merci del sistema; non è così per la merce 2 del sistema **C** o le seconde $M-k$ merci del sistema **D**, che sono solo prodotte. Se un'innovazione dovesse dimezzare la quantità occorrente di tutti i mezzi di produzione necessari a produrre una merce di lusso (c_{12} o $\mathbf{D}_{12}$) l'unica conseguenza è che si dimezza il prezzo di tale o di tali merci; non variano i prezzi relativi delle altre merci né il saggio di profitto. Viceversa se un simile cambiamento si verificasse per una merce che fa parte dei mezzi di produzione tutti i prezzi e il saggio di profitto varierebbero di conseguenza.

Tutto ciò si verifica facilmente eliminando l'equazione o le equazioni del prezzo che si riferisce alla merce di lusso: poiché il suo prezzo compare solo in quella equazione (e non nelle altre) le equazioni rimanenti continuano a formare un sistema determinato che continuerà a essere soddisfatto dalle soluzioni del sistema maggiore. Se invece eliminassimo un'equazione che si riferisce al prezzo di una merce direttamente o indirettamente usata come mezzo di produzione o di sussistenza il numero delle incognite rimarrebbe invariato, perché il prezzo di tale merce compare anche nelle altre equazioni, trattandosi di un mezzo di produzione di una o più altre merci del sistema. Il sistema verrebbe così a essere indeterminato.

Un fenomeno analogo si verificherebbe per tutte quelle merci di lusso usate esclusivamente come mezzi di produzione di se stesse sia direttamente (es. i cavalli da corsa) sia indirettamente oppure nella produzione di altre merci di lusso (es. la seta greggia). In tal caso la matrice dei coefficienti assumerebbe la forma quasi triangolare superiore:

$$\underset{(M,M)}{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \underset{(k,k)}{\mathbf{E}_{11}} & \underset{(k,M-k)}{\mathbf{E}_{12}} \\ \underset{(M-k,k)}{\mathbf{O}} & \underset{(M-k,M-k)}{\mathbf{E}_{22}} \end{bmatrix}.$$

Sono emerse così due categorie di merci: le merci *base*, cioè quelle che entrano direttamente o indirettamente nella produzione di *tutte* le merci del sistema e le merci *non-base*, che sono quelle che non soddisfano la suddetta condizione. Tale distinzione ricorda quella operata dagli economisti classici fra merci di prima necessità e merci di lusso; in questo contesto, però, si può darle una caratterizzazione analitica: se nel sistema sono presenti solo merci base la matrice dei coefficienti è indecomponibile o irriducibile; se invece è presente una o più merci non-base la matrice è decomponibile o riducibile. In questo secondo caso, facendo riferimento alla situazione più generale rappresentata dalla matrice $\mathbf{E}$, le merci base sono le prime k, i cui coefficienti tecnologici sono rappresentati dalla sottomatrice indecomponibile $\mathbf{E}_{11}$, mentre le merci non-base sono le rimanenti $M - k$, i cui coefficienti sono rappresentati dalle sottomatrici $\mathbf{E}_{12}$ ed $\mathbf{E}_{22}$.

3.2 Ripartizione del sovrappiù fra capitalisti e lavoratori

Finora si è supposto che il sovrappiù sia percepito esclusivamente dai capitalisti sotto forma di profitto (e che, di conseguenza, il salario sia costituito solo dalle sussistenze). Dobbiamo però considerare il caso intermedio (e più realistico, almeno oggigiorno) in cui il sovrappiù è distribuito fra capitalisti e lavoratori. In tal caso il salario comprende, oltre alle sussistenze una parte del sovrappiù. Si possono seguire diverse convenzioni contabili per tener conto di questa duplice natura del salario. Di seguito considereremo il salario di sussistenza incluso nei requisiti tecnici e il salario di sovrappiù come una variabile a parte, w. Supporremo inoltre che il salario (almeno quello di sovrappiù) sia pagato alla fine del processo produttivo, abbandonando così la concezione classica del salario «anticipato» dai capitalisti (sebbene non sia difficile riformulare le equazioni per il caso in cui il salario sia pagato in anticipo).

Diventa così necessario indicare esplicitamente le quantità di lavoro impiegate in ciascuna industria annualmente, $\boldsymbol{\ell}^T = [\ell_1 \ \cdots \ \ell_m \ \cdots \ \ell_M]$, che saranno considerate frazioni del lavoro annuale della società, preso come unità, così che:

$$\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_M = 1.$$

Considereremo il lavoro di qualità uniforme (le evenutali differenze di qualità saranno ridotte a differenze di quantità) cosicché sarà possibile considerare il salario unitario, w, uniforme.

Le equazioni dei prezzi diventano pertanto:

$$
\begin{cases}
(p_1 a_{11} + \ldots + p_m a_{m1} + \ldots + p_M a_{M1})(1+\pi) + w\ell_1 = p_1 \\
\vdots \\
(p_1 a_{1m} + \ldots + p_m a_{mm} + \ldots + p_M a_{Mm})(1+\pi) + w\ell_m = p_m \\
\vdots \\
(p_1 a_{1M} + \ldots + p_m a_{mM} + \ldots + p_M a_{MM})(1+\pi) + w\ell_M = p_M ,
\end{cases}
\tag{8.10}
$$

o, in forma compatta,[1]

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A}(1+\pi) + w\boldsymbol{\ell}^T = \mathbf{p}^T. \tag{8.10$'$}$$

Per i coefficienti di produzione a_{mi} si continua a supporre valide le condizioni (8.5) di esistenza di un sovrappiù.

Nel sistema (8.10′) ci sono M equazioni in $M+2$ incognite: $p_1, \ldots, p_m, \ldots, p_M$, w e π, quindi si hanno 2 gradi di libertà. Uno di essi viene eliminato scegliendo il numerario, cioè ponendo alternativamente

$$\text{i) } p_m = 1, \quad \text{oppure} \quad \text{ii) } \mathbf{p}^T\mathbf{b} = 1, \quad \text{oppure} \quad \text{iii) } w = 1; \tag{8.11}$$

il numerario del sistema è così rappresentato, alternativamente: i) dalla merce m; ii) da un paniere di merci, $\mathbf{b}$;[2] iii) da una unità di lavoro. Salvo diversa indicazione in ciò che segue seguiremo Sraffa, e fisseremo come numerario del sistema dei prezzi il sovrappiù o prodotto netto del sistema economico. Grazie all'unità di misura scelta per le varie merci gli elementi del vettore delle quantità *lorde* prodotte saranno tutti pari a 1, cioè $\mathbf{q} = \mathbf{u}$, dove $\mathbf{u} = [1, \; \cdots, 1, \; \cdots, 1]^T$. Il prodotto netto sarà

[1] Nel caso di salari anticipati ai lavoratori, $\hat{w}$, le equazioni dei prezzi diventano $(1+\pi)(\hat{\mathbf{p}}^T\mathbf{A}+\hat{w}\boldsymbol{\ell}^T) = \hat{\mathbf{p}}^T$, che, sviluppate nella forma $(1+\pi)\hat{\mathbf{p}}^T\mathbf{A}+(1+\pi)\hat{w}\boldsymbol{\ell}^T = \hat{\mathbf{p}}^T$, si riducono all'equazione (8.10′) ponendo $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}$ e $w = (1+\pi)\hat{w}$. Questo caso non sarà dunque esplicitamente trattato, salvo in quei casi in cui i risultati subiscono modifiche rilevanti.

[2] Si noti che la normalizzazione che si ottiene ponendo $p_m = 1$ è ottenibile come caso particolare di quella che si ottiene ponendo $\mathbf{p}^T\mathbf{b} = 1$, nel caso in cui si fissa $\mathbf{b} = \mathbf{e}_m$.

pertanto $\mathbf{u} - \mathbf{Au}$. Affinché esso sia il numerario del sistema si dovrà porre

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{u} = 1. \tag{8.12}$$

Avendo però due gradi di libertà rimane comunque da fissare un'altra variabile: non avendo senso definire un secondo numerario la scelta ricade su una delle due variabili distributive. Questo è un punto cruciale dell'analisi. Non significa che una delle due variabili distributive di un sistema economico può essere scelta in maniera completamente arbitraria. Significa soltanto che le determinanti della distribuzione del reddito vanno cercate *al di fuori* del sistema della produzione.[3] Già gli economisti classici si erano accorti di questa indeterminatezza del sistema dei prezzi e l'avevano risolta ipotizzando che il salario unitario fosse determinato delle sussistenze, e quindi esogenamente al sistema dei prezzi. La tendenza seguita dalle impostazioni più moderne relativamente al sistema (8.10′) è, contrariamente ai classici, quella di cercare *esogenamente* al sistema stesso una relazione che determini il saggio di profitto. Anche Sraffa mostra di essere in linea con questa impostazione, pur non inoltrandosi alla ricerca della relazione che *determina* il saggio di profitto. Si limita infatti a un brevissimo accenno in cui si afferma che esso è ≪suscettibile di essere determinato da influenze estranee al sistema della produzione, e particolarmente dal livello dei tassi dell'interesse monetario.≫ (§ 44) Tale affermazione, più che l'enunciazione di una teoria del profitto pare una indicazione per svincolare la sua determinazione da un principio meccanico che, in una qualche forma, reintroduca l'idea che la distribuzione sia regolata da circostanza naturali o tecniche o accidentali, ma comunque tali da vanificare una qualsiasi azione esterna per modificarla.[4] Sraffa comunque prosegue considerando una delle due variabili distributive esogena al sistema dei prezzi e risolvendo il sistema

[3]Si noti la differenza rispetto all'analisi neoclassica, dove la distribuzione del reddito si determina simultaneamente ai prezzi attraverso le curve della produttività marginale dei fattori e le loro dotazioni.

[4]Una teoria ≪monetaria≫ del saggio di profitto per lo schema di Sraffa è stata elaborata da Pivetti (1985); alternativamente è stata proposta una possibile determinazione del saggio di profitto a partire dal saggio di crescita di lungo periodo del sistema economico attraverso la cosiddetta ≪equazione di Cambridge≫ presentata in Pasinetti (1962). Si vedano, inoltre, Panico (1988) e Pasinetti (1988).

parametricamente in corrispondenza dei diversi valori che tale variabile può assumere. Dapprima considera il salario unitario come variabile indipendente (capitoli III, IV e V); successivamente considererà come variabile indipendente il saggio di profitto. In questa sede seguiremo quest'ultima impostazione e risolveremo il sistema rispetto ai prezzi e al salario unitario in corrispondenza dei diversi livelli assegnati al saggio di profitto: $\mathbf{p}(\pi)$ e $w(\pi)$.

Sovrappiù percepito solo dai lavoratori

Cominciamo a studiare il sistema dei prezzi quando (ipoteticamente) tutto il prodotto netto o sovrappiù è percepito dai lavoratori, cioè quando $w = 1$ o, equivalentemente, quando $\pi = 0$. In questo caso il sistema (8.10′), (8.12) diventa

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T\mathbf{A} + \boldsymbol{\ell}^T, \tag{8.13}$$

la cui soluzione rispetto a $\mathbf{p}$ è:

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T(0) = \boldsymbol{\ell}^T(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} =: \mathbf{v}^T. \tag{8.14}$$

Positività dei prezzi. Si osservi che $\boldsymbol{\ell}^T \geq \mathbf{o}$; d'altra parte la matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ è un caso particolare della matrice $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1}$, quando $t = 1$; quest'ultima matrice è semi-positiva (positiva se $\mathbf{A}$ è indecomponibile) se e solo se $0 \leq t < 1/\lambda^*$, dove λ^* è l'autovalore di modulo massimo di $\mathbf{A}$. Nel nostro caso, pertanto, la condizione di semi-positività della matrice inversa e, di conseguenza, della soluzione del sistema, si riduce a $1 < 1/\lambda^*$, cioè

$$\lambda^* < 1,$$

che è anche la condizione di esistenza di un sovrappiù positivo.

Significato economico dei prezzi. È possibile indagare esplicitamente il tipo di teoria del valore espresso dai prezzi (8.14). La matrice $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ è la cosiddetta «matrice inversa di Leontief». Indichiamo con α_{mi} il suo generico elemento. Ciascuno di essi indica le quantità totali delle varie merci richieste direttamente o indirettamente nell'intero sistema per poter disporre di una unità di merce i come merce finale. Il vettore $\mathbf{v}$ è dato dal prodotto:

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \ell_1 \cdots \ell_m \cdots \ell_M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mI} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{M1} & \cdots & a_{Mi} & \cdots & a_{MI} \end{bmatrix} =$$
$$= \left[\sum_{m=1}^{M} \ell_m \alpha_{m1} \cdots \sum_{m=1}^{M} \ell_m \alpha_{mi} \cdots \sum_{m=1}^{M} \ell_m \alpha_{mI} \right].$$

Ciascuno dei suoi elementi indica la quantità totale di lavoro richiesta direttamente o indirettamente nell'intero sistema per poter disporre di una unità di merce i come merce finale. Detto in altre parole ciascun elemento v_i del vettore $\mathbf{v}$ indica la quantità di lavoro verticalmente integrato o incorporato in ciascuna unità di merce i. Possiamo quindi concludere che i prezzi (8.14) esprimono la *teoria del valore lavoro*.

Un modo alternativo per vedere ciò è osservare che, mediante l'algoritmo di inversione per sviluppo in serie, i prezzi (8.14) possono anche essere espressi nella forma:

$$\mathbf{p}^T(0) = \boldsymbol{\ell}^T(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = (\boldsymbol{\ell}^T + \boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A} + \boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A}^2 + \boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A}^3 + \cdots). \tag{8.15}$$

Gli addendi della serie tra parentesi sono le quantità di lavoro necessarie a produrre le varie merci ($\boldsymbol{\ell}^T$), le quantità di lavoro necessarie a produrre i mezzi di produzione impiegati per produrre le varie merci ($\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A}$), le quantità di lavoro necessarie a produrre i mezzi di produzione che a loro volta sono stati impiegati per produrre i mezzi di produzione impiegati per produrre le varie merci ($\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A}^2$), etc. La loro somma costituisce dunque il cosiddetto lavoro incorporato nelle varie merci.

Siamo ora in grado di cogliere le origini di alcune delle difficoltà incontrate dai classici nel sostenere la validità della teoria del valore lavoro. Finora abbiamo esaminato i sistemi dei prezzi che corrispondono a due configurazioni alternative estreme riguardanti la distribuzione del reddito: i) $\pi = \Pi$ e $w = 0$ e ii) $\pi = 0$ e $w = 1$. Li possiamo mettere a paragone nella tabella seguente:

Caso i) $\pi = \Pi$ e $w = 0$ (cioè salario di sussistenza)		Caso ii) $\pi = 0$ e $w = 1$,
$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^{*T}$ dove $\mathbf{p}^{*T} = (1+\Pi)\mathbf{p}^{*T}\mathbf{A}$		$\mathbf{p} = \mathbf{v}$,
$\dfrac{\mathbf{p}^{*T}\mathbf{a}_m}{\mathbf{p}^{*T}\mathbf{a}_\mu} = \dfrac{p^*_m}{p^*_\mu}$	$\neq$	$\dfrac{p_m}{p_\mu} = \dfrac{v_m}{v_\mu}$
Teoria del **valore capitale**		Teoria del **valore lavoro**

Gli economisti classici partivano dall'ipotesi distributiva che i salari fossero fissati al livello di sussistenza, cioè che $w = 0$; da quanto detto prima ciò porta a ottenere un sistema di prezzi che esprime una teoria del valore capitale. Per ottenere, come avrebbero voluto, una teoria del valore lavoro sarebbero dovuti partire dall'ipotesi distributiva opposta, $\pi = 0$. L'unica possibilità di ottenere una teoria del valore lavoro partendo dall'ipotesi di salari fissati al livello di sussistenza è che $\frac{v_m}{v_i} = \frac{\mathbf{p}^{*T}\mathbf{a}_m}{\mathbf{p}^{*T}\mathbf{a}_i}$, cioè che:

$$\frac{\mathbf{p}^{*T}\mathbf{a}_m}{v_m} = \frac{\mathbf{p}^{*T}\mathbf{a}_\mu}{v_\mu}, \quad m, \mu = 1, \dots M;$$

il rapporto fra il valore del capitale e la quantità di lavoro impiegati deve cioè essere uniforme tra i vari settori. Si tratta di un'ipotesi alquanto restrittiva. A essa erano dovuti ricorrere sia Ricardo che Marx (il primo l'aveva chiamata uguaglianza dell'intensità di capitale, il secondo uniformità della composizione organica del capitale).

4 Variazione dei prezzi al variare della distribuzione del reddito

4.1 Necessità di una misura invariabile del valore

La semplicità del risultato trovato nel caso in cui tutto il sovrappiù va ai lavoratori e il saggio di profitto è nullo, nel quale i prezzi relativi sono determinati esclusivamente dalle quantità di lavoro, scompare non appena consideriamo configurazioni alternative della distribuzione del reddito. Non appena, infatti, il saggio di profitto viene fatto variare, anche di poco, da 0 a un valore positivo l'intera struttura dei prezzi varia, come vedremo, in maniera imprevedibile. Tale imprevedibilità è ulteriormente complicata dal fatto che poiché il prezzo di una qualsiasi merce deve essere necessariamente espresso in termini di un'altra, risulta impossibile distinguere, all'interno di una variazione del suo prezzo relativo, quella parte della variazione che può essere attribuita alle caratteristiche della merce stessa da quella parte della variazione che va attribuita alla merce usata come unità di misura dei valori, cioè il numerario. In altre parole di fronte all'aumento del prezzo relativo di una certa merce non si è in grado di dire se tale aumento è dovuto a un rincaro della merce stessa o a un ribasso della merce usata come numerario. Per ≪isolare≫ la variazione del prezzo della merce oggetto di analisi da quelle che subisce il numerario sarebbe necessario disporre di una merce il cui valore non varia relativamente alle altre merci, cioè di una ≪misura invariabile del valore≫; se si riuscisse a trovare tale merce, usandola come numerario, si sarebbe in grado di cogliere soltanto le variazioni del prezzo relativo della merce oggetto di analisi, senza le interferenze derivanti dalla variazione del valore del numerario. Tale problema era già stato incontrato da Ricardo nel momento in cui aveva cercato di valutare il grado di approssimazione della teoria del valore-lavoro; tuttavia egli non era riuscito a trovare una soluzione soddisfacente ad esso. Uno dei contributi cruciali dati da Sraffa all'analisi ricardiana è stato quello di mostrare che la funzione di misura del valore invariabile rispetto a variazioni della distribuzione del reddito può essere svolta, se non da una merce singola, da una merce *composita*, che può sempre essere costruita combinando opportunamente le merci prodotte nel sistema in esame. Per seguire Sraffa in questo tentativo conviene individuare per quali ragioni i prezzi relativi variano al variare della distribuzione del reddito e in che forma si manifestano tali variazioni all'interno delle equazioni dei prezzi.

Esprimiamo i prezzi in termini di un qualunque numerario, $\mathbf{b}$ (che potrebbe anche essere il prodotto netto del sistema osservato, $\mathbf{b} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{u}$). Supponiamo che il saggio di profitto sia inizialmente fissato a un dato livello, $\bar{\pi}$ (ad esempio, anche se non necessariamente, $\pi = 0$), in corrispondenza del quale il sistema dei prezzi e il salario unitario—espressi in termini del numerario $\mathbf{b}$—siano, rispettivamente, $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(\bar{\pi})$ e $\bar{w} = w(\bar{\pi})$. $\bar{\mathbf{p}}$ e $\bar{w}$ pertanto soddisfano le equazioni $(1+\bar{\pi})\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_m + \bar{w}\ell_m = \bar{p}_m$, $m = 1, \ldots, M$, e $1 = \bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{b} = (1+\bar{\pi})\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{A}\mathbf{b} + \bar{w}\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{b}$, che possono essere scritte nella forma:

$$(1+\bar{\pi}) + \bar{w}\frac{\ell_1}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_1} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_1} \tag{8.16-1}$$

$$\vdots$$

$$(1+\bar{\pi}) + \bar{w}\frac{\ell_m}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_m} = \frac{\bar{p}_m}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_m} \tag{8.16-m}$$

$$\vdots$$

$$(1+\bar{\pi}) + \bar{w}\frac{\ell_M}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_M} = \frac{\bar{p}_M}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_M} \tag{8.16-M}$$

$$(1+\bar{\pi}) + \bar{w}\frac{\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{b}}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{A}\mathbf{b}} = \frac{1}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{A}\mathbf{b}}. \tag{8.16-$\mathbf{b}$}$$

Supponiamo ora che si abbia una variazione, poniamo un aumento, del saggio di profitto, $\Delta\pi$. Come dovrebbero variare le altre variabili, cioè il salario unitario e i prezzi relativi, affinché le equazioni (8.16) continuino a rimanere soddisfatte? La risposta non è immediata, in quanto tutte le variabili sono interdipendenti fra loro. Per capire qualcosa cominceremo a ragionare in maniera causale, seguendo il ragionamento di Sraffa. Supponiamo dapprima che tutti i prezzi rimangano invariati. Allora una riduzione *uniforme* del salario unitario (qualunque essa sia) non sarebbe sufficiente a ripristinare il pareggio del bilancio in tutte le industrie (a ristabilire l'uguaglianza tra il primo membro (costo) e il secondo (ricavo) in tutte le equazioni): infatti in quelle industrie che impiegano una proporzione sufficientemente alta di lavoro rispetto alle merci usate come mezzi di produzione si originerà un avanzo (*surplus*), mentre in quelle industrie che impiegano una proporzione sufficientemente bassa di lavoro rispetto alle merci si originerà un disavanzo (*deficit*). Se vogliamo eliminare gli avanzi e i disavanzi è *necessario* che varino anche i secondi membri, cioè che varino i prezzi delle merci rispetto ai propri mezzi di produzione, $p_m/(\mathbf{p}^T\mathbf{a}_m)$.

L'unica merce che non andrebbe soggetta a questa necessità di variare il proprio prezzo rispetto ai suoi mezzi di produzione al fine di ripristinare il pareggio del bilancio sarebbe quella merce—se esiste—che è prodotta impiegando lavoro e mezzi di produzione in quella ≪'proporzione critica' fra lavoro e mezzi di produzione che [segna] lo spartiacque fra industrie 'in avanzo' e industrie 'in disavanzo'.≫ (Sraffa (1960, p. 20))

4.2 In che direzione variano i prezzi

Il ragionamento espresso nel paragrafo precedente spiega *perché* variano i prezzi quando varia la distribuzione. Vediamo ora se si può dire qualche cosa circa la *direzione* di queste variazioni. Un primo e provvisorio ≪indicatore≫ è costituito dal rapporto fra il lavoro impiegato in ciascuna industria e il valore dei mezzi di produzione (l'inverso dell'intensità capitalistica). Più precisamente osservando le equazioni (8.16) possiamo affermare che se un'industria, poniamo la 1, ha un rapporto fra lavoro e mezzi di produzione inferiore a quello medio, la riduzione di salario ($\Delta w < 0$) conseguente all'aumento del saggio di profitto ($\Delta\pi > 0$) non sarà sufficiente a ripristinare il pareggio del bilancio, in quanto si avrà

$$|\Delta\pi| > \left|\Delta w \frac{\ell_1}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_1}\right|.$$

Sarà pertanto necessario che il prezzo della merce 1 *aumenti* rispetto ai suoi mezzi di produzione. Su questa base si potrà sostenere che aumenteranno rispetto ai propri mezzi di produzione i prezzi di quelle merci che impiegano un rapporto tra lavoro e mezzi di produzione inferiore alla media e diminuiranno rispetto ai propri mezzi di produzione i prezzi delle merci che impiegano un rapporto fra lavoro e mezzi di produzione superiore alla media. Questa conclusione, come si è detto, è però provvisoria, in quanto non tiene conto del fatto che la variazione dei prezzi così ottenuta influenza anche le grandezze $\ell_m/\mathbf{p}^T\mathbf{a}_m$ a primo membro delle equazioni (8.16), e cioè i rapporti fra lavoro e mezzi di produzione nelle diverse industrie. Se continuassimo a pensare in termini causali potremmo osservare infatti che a seguito di queste variazioni dei rapporti fra lavoro e mezzi di produzione delle varie industrie, si genererebbe una nuova serie di disavanzi e avanzi in tutte le industrie; ciò renderebbe necessario un nuovo *round* di variazioni dei prezzi delle merci per ristabilire il pareggio del bilancio in ciascuna industria; di nuovo ciò altererebbe i rapporti fra lavoro e mezzi di produzione e si assisterebbe così a una serie infinita di variazioni dei prezzi, la cui direzione è chiaramente imprevedibile. Potrebbe capitare, ad esempio, che a seguito di un aumento del saggio di profitto il prezzo di un prodotto di un'industria caratterizzata da una bassa proporzione tra lavoro e mezzi di produzione (e quindi potenzialmente in disavanzo) possa a sua volta diminuire, anziché aumentare, rispetto ai propri mezzi di produzione. Questo effetto apparentemente paradossale è dovuto al fatto che i mezzi di produzione impiegati in un'industria sono essi stessi prodotti da altre industrie, le quali possono a loro volta impiegare una proporzione ancora più bassa fra lavoro e mezzi di produzione (e ciò può essere vero anche per questi ultimi mezzi di produzione e così via); in tal caso il prezzo del prodotto, anche se proveniente da un'industria ≪in disavanzo≫, potrebbe *diminuire* relativamente ai suoi mezzi di produzione.

4.3 Influenza del numerario

Si è appena visto come la variazione dei prezzi delle merci rispetto ai propri mezzi di produzione sia il modo con cui viene ripristinato il pareggio del bilancio nelle varie industrie a seguito di una variazione della distribuzione. Ma osservando le equazioni (8.16) si vede come per l'industria che produce la merce usata numerario[5] tale variazione debba *necessariamente* ottenersi solo attraverso la variazione dei prezzi delle *altre* merci, quelle usate come suoi mezzi di produzione, non potendo variare il prezzo della merce stessa che, per convenzione, è stato fissato pari a 1. Se a seguito dell'aumento del saggio di profitto e dopo la riduzione del salario rimanesse, ad esempio, un disavanzo, il rincaro rispetto ai mezzi di produzione della merce prodotta necessario a colmare questo disavanzo dovrebbe essere ottenuto attraverso una variazione opportuna del

[5]Tale industria può essere costituita effettivamente da una singola industria o da un ≪aggregato≫ di industrie.

prezzo di un'*altra* merce o di *altre* merci, fra quelle che usate come suoi mezzi di produzione: *questi prezzi infatti appaiono anche tra le variabili dell'equazione (8.16-***b***).* Pertanto su questi stessi prezzi si andranno a ≪scaricare≫ oltre alle pressioni derivanti dai disavanzi o dagli avanzi che si originano nelle rispettive industrie, anche quelli che si originano nell'industria del numerario. Quindi al variare della distribuzione del reddito (di π) i prezzi delle merci espressi in termini del generico numerario **b** dovranno variare non solo per ripristinare il pareggio del bilancio nella corrispondente industria, *ma anche per ripristinare il pareggio del bilancio nell'industria che produce la merce usata come numerario.*

La presenza del vettore **p** tra le variabili dell'equazione (8.16-**b**) mostra, appunto, che quando varia la distribuzione del reddito i prezzi di ciascuna merce subiscono non uno, ma *due* tipi di pressioni, che potremmo chiamare ≪effetto Specifico di prezzo≫ ed ≪effetto Numerario≫:

(S) *effetto Specifico di prezzo*: variazione del prezzo di una merce dovuta alla necessità di ripristinare il pareggio del bilancio nella industria corrispondente;

(N) *effetto Numerario*: variazione del prezzo di una merce dovuta alla necessità di ripristinare il pareggio del bilancio nell'industria che produce la merce numerario.

La compresenza di entrambi questi effetti sul prezzo di una merce al variare della distribuzione del reddito era stata colta da Ricardo, secondo il quale per isolare la variazione del prezzo relativo di una data merce è necessario utilizzare come numerario una merce il cui valore relativo fosse *invariante* rispetto a variazioni della distribuzione del reddito. In altre parole la presenza dell'effetto **(N)** rende

> impossibile dire di una particolare variazione di prezzo se essa sorga dalle peculiarità della merce che viene misurata o da quelle della merce che viene presa come misura (Sraffa (1960, p. 23)).

Per contrasto possiamo definire *misura invariabile del valore* una merce che, se usata come numerario, rende l'effetto **(N)** nullo, cioè un numerario che non dà origine a pressioni sui prezzi delle altre merci al fine di ristabilire il pareggio del bilancio nella propria industria.

4.4 La costruzione di una misura invariabile del valore

È poco probabile che si possa trovare nella realtà una merce che, sia pure approssimativamente, abbia le caratteristiche richieste. L'indicazione di Sraffa, a questo punto, è quella di costruire una «merce composita» mescolando opportunamente le merci prodotte nel sistema. Avendo visto nel paragrafo precedente che l'origine dei «disturbi» indotti dal numerario sui prezzi delle diverse merci sono causati dalla necessità che ha la merce usata come numerario di cambiare di valore rispetto ai suoi mezzi di produzione, si può intuire che la merce composita che fa al caso nostro debba essere una merce composita che consiste delle stesse merci, combinate nelle stesse proporzioni, che si riscontrano nei suoi mezzi di produzione; in altri termini sia la merce composita prodotta che l'insieme dei suoi mezzi di produzione devono essere la stessa merce composita, seppur presa in quantità diverse.

4.5 Il sistema tipo

Per costruire tale merce passiamo a considerare le relazioni tra le quantità prodotte nel sistema economico in esame. Per rappresentarle possiamo utilizzare il sistema aperto di Leontief, che, in generale, è rappresentabile nella forma:

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{y} \tag{8.17a}$$

$$\boldsymbol{\ell}^T \mathbf{q} = q_N, \tag{8.17b}$$

dove $\mathbf{q}$ indica il vettore a M componenti delle quantità totali prodotte delle varie merci (il prodotto lordo del sistema), $\mathbf{y}$ indica il vettore (dato) a M componenti delle quantità delle stesse merci che possono essere dedicate alla domanda finale (il prodotto netto) e q_N la quantità di lavoro esistente nel sistema.

Si noterà che l'utilizzo dello schema di Leontief richiede la reintroduzione dell'ipotesi dei rendimenti di scala costanti. Tale ipotesi sarà però utilizzata solo temporaneamente, in quanto, come si vedrà, serve soltanto per calcolare le quantità delle varie merci che costituiscono una particolare merce composita che non dovrà essere prodotta nella realtà, ma che dovrà soltanto essere usata come numerario del sistema dei prezzi.

Grazie alla convenzione scelta circa le unità di misura delle varie merci, il vettore del prodotto lordo del sistema osservato è pari a $\mathbf{u}$; inoltre l'unità di misura del lavoro è la quantità di lavoro disponibile nel sistema. Pertanto le relazioni (8.17), valutate in corrispondenza delle quantità effettivamente prodotte nel sistema, assumono la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{y}\\ \boldsymbol{\ell}^T\mathbf{u} &= 1.\end{aligned}$$

Indichiamo ora con $\boldsymbol{\alpha}_m^T$, $m = 1, \dots, M$ le righe della matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_M^T \end{bmatrix};$$

ciascun vettore $\boldsymbol{\alpha}_m^T$ è il vettore riga delle quantità di merce m impiegate nella produzione di ciascuna unità delle diverse merci. Ricordando che le componenti del vettore $\mathbf{y}$, prodotto netto dell'economia, possono essere fissate a piacere, per costruire la merce composita descritta al paragrafo precedente fissiamo le quantità delle varie merci da destinare alla domanda finale, $y_1, \dots, y_m, \dots, y_M$, in modo tale che esse risultino *proporzionali* alle quantità delle stesse merci usate come mezzi di produzione in tutto il sistema economico, $\boldsymbol{\alpha}_1^T\mathbf{q} \dots, \boldsymbol{\alpha}_m^T\mathbf{q}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_M^T\mathbf{q}$; si deve avere, pertanto,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^T\mathbf{q} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m^T\mathbf{q} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_M^T\mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad \text{cioè} \quad \mathbf{y} = R\mathbf{A}\mathbf{q}. \tag{8.18}$$

In tale situazione il vettore del prodotto netto, $\mathbf{y}$, è proporzionale al vettore dei mezzi di produzione utilizzati per produrlo, $\mathbf{A}\mathbf{q}$; il fattore di proporzionalità R può essere interpretato come un saggio *fisico* di sovrappiù: è il rapporto fra il prodotto netto (o sovrappiù) di merce m e la quantità della stessa merce usata in tutto il sistema come mezzo di produzione. Nel caso (ipotetico) che stiamo considerando, che Sraffa chiama «sistema tipo» tali rapporti sono *uniformi* tra le varie merci:

$$R = \frac{y_1}{\boldsymbol{\alpha}_1^T \mathbf{q}} = \cdots = \frac{y_m}{\boldsymbol{\alpha}_m^T \mathbf{q}} = \cdots = \frac{y_M}{\boldsymbol{\alpha}_M^T \mathbf{q}}.$$

In esso «le diverse merci [sono] rappresentate nel complesso dei suoi mezzi di produzione *nelle stesse proporzioni* in cui si trovano fra i suoi prodotti» Sraffa (1960, p. 24; corsivo nell'originale). Questa uniformità nelle proporzioni non è ovviamente plausibile dal punto di vista economico: non c'è alcuna ragione per supporre che le proporzioni con cui le merci vengono assorbite dalla domanda finale riflettano esattamente le proporzioni con cui le stesse merci sono usate come mezzi di produzione. Ma, come si è detto, il nostro è solo un esercizio astratto, finalizzato alla costruzione di un opportuno numerario, avente determinate caratteristiche.

Sostituendo l'equazione (8.18) nella (8.17a) e tenendo conto della normalizzazione precedentemente adottata per le quantità di lavoro otteniamo le equazioni che definiscono le relazioni fra le quantità totali prodotte nel *sistema tipo*:

$$\mathbf{q} = (1 + R)\mathbf{A}\mathbf{q} \tag{8.19a}$$

$$\boldsymbol{\ell}^T \mathbf{q} = 1. \tag{8.19b}$$

Il sistema (8.19a), che può essere scritto nella forma

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{1+R}\mathbf{I}\right)\mathbf{q} = \mathbf{o},$$

è il sistema degli autovettori destri di $\mathbf{A}$. Ponendo

$$\eta = \frac{1}{1+R} \tag{8.20}$$

il sistema diventa:

$$(\mathbf{A} - \eta\mathbf{I})\mathbf{q} = \mathbf{o}. \tag{8.19a$'$}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema lineare omogeneo (8.19a′) ammetta soluzioni non-banali è che:

$$\det(\mathbf{A} - \eta \mathbf{I}) = 0; \tag{8.21}$$

La (8.21) è l'equazione caratteristica della matrice $\mathbf{A}$; essa coincide con la (8.8). Come in precedenza fissiamo l'attenzione sull'autovalore di modulo massimo di $\mathbf{A}$, λ^*, in quanto il secondo risultato dei teoremi di Perron-Frobenius assicurano che l'autovettore destro ad esso corrispondente è semi-positivo (positivo se la matrice $\mathbf{A}$ è indecomponibile). Fissando $\eta = \lambda^*$ otteniamo, grazie alla (8.20), il valore del saggio fisico uniforme di sovrappiù:

$$R^* = \frac{1}{\lambda^*} - 1.$$

Grazie alla (8.9) si vede che

$$R^* = \Pi, \tag{8.22}$$

cioè il saggio fisico uniforme di sovrappiù coincide col saggio massimo di profitto. Emerge così una terza interpretazione della condizione di vitalità (8.6):[6] essa garantisce anche la non-negatività del saggio uniforme di sovrappiù.

Sostituendo ora il valore di R determinato dalla (8.22) nelle (8.19) e risolvendo rispetto a $\mathbf{q}$ otteniamo il vettore delle quantità totali che sono prodotte nel sistema tipo. Indichiamo con $\mathbf{q}^*$ tale vettore; analiticamente esso è l'autovettore destro della matrice $\mathbf{A}$ corrispondente all'autovalore di modulo massimo, $\lambda^* = 1/(1+\Pi)$, normalizzato dalla (8.19b). Il vettore $\mathbf{q}^*$ viene chiamato *prodotto lordo tipo.* Si vede facilmente che il *prodotto netto tipo*, $\mathbf{y}^* = \Pi \mathbf{A}\mathbf{q}^*$, è proporzionale a $\mathbf{q}^*$; infatti per la (8.19a):

$$\mathbf{y}^* := \Pi \mathbf{A}\mathbf{q}^* = \frac{\Pi}{1+\Pi}\mathbf{q}^*; \tag{8.23}$$

poiché $\mathbf{q}^*$ e $\mathbf{y}^*$ sono fra loro proporzionali, anche $\mathbf{y}^*$ sarà un autovettore destro di $\mathbf{A}$ corrispondente all'autovalore di modulo massimo $\frac{1}{1+\Pi}$.

[6] È istruttivo per il lettore ricordare in quali altri contesti ci si è imbattuti in questa condizione.

Quindi

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \frac{1}{1+\Pi}\mathbf{y}^*; \tag{8.24a}$$

inoltre sostituendo la (8.23) nella (8.19b) si ha:

$$\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{y}^* = \frac{\Pi}{1+\Pi}. \tag{8.24b}$$

Il prodotto netto tipo può essere considerato una merce composita; è ciò che Sraffa chiama *merce tipo*.

Esempio 4. (Sistema nelle proporzioni «tipo») *Si consideri un sistema economico con due industrie in cui la tecnica del sistema è rappresentata dalla seguente matrice e dal seguente vettore dei coefficienti di lavoro diretto:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\ell}^T = [1/40 \quad 1/20]$$

L'autovalore di modulo massimo della matrice $\mathbf{A}$ *è* $\lambda^* = 0,8$, *quindi il saggio fisico di sovrappiù e il saggio massimo di profitto sono* $\Pi = 0,25\%$. *In tal caso si ha:*

- *prodotto lordo tipo:* $\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$;
- *prodotto netto tipo è* $\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$;
- *mezzi di produzione utilizzati è* $\mathbf{A}\mathbf{q}^* = \frac{1}{1+0,25}\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Si osservi come i vettori $\mathbf{q}^*$, $\mathbf{y}^*$ *e* $\mathbf{A}\mathbf{q}^*$ *siano proporzionali fra loro.*

4.6 Relazione salari-profitti nel sistema tipo e nel sistema effettivo

Incidentalmente, prima di mostrare come la merce tipo costituisca una misura invariabile dei valori, va evidenziata un'altra caratteristica rilevante che possiede il sistema tipo, che permette di risolvere il problema ricardiano di determinare il saggio di profitto di un sistema economico senza imbattersi nei fenomeni di circolarità logica dovuti all'interdipendenza tra prezzi e distribuzione del reddito. Come si è visto tali problemi sorgevano dalla necessità di dover valutare col sistema dei prezzi degli aggregati di merci di composizione diversa: il prodotto sociale, i mezzi di produzione impiegati e i salari reali. Ora, nel sistema tipo, si è visto, ci si trova nella particolare condizione per cui il prodotto sociale ($\mathbf{q}^*$) e i mezzi di produzione impiegati ($\mathbf{Aq}^*$) sono costituiti dallo stesso aggregato di merci, cioè dalle stesse merci nelle stesse proporzioni ($\mathbf{q}^*$ e $\mathbf{Aq}^*$ sono infatti multipli l'uno dell'altro). Se, per ipotesi, anche i salari reali fossero costituiti dallo stesso insieme di merci prese nelle stesse proporzioni, e dunque fossero una frazione ω del prodotto netto del sistema tipo, si avrebbe

$$\text{salari reali} = \omega(\mathbf{q}^* - \mathbf{Aq}^*) = \omega\mathbf{y}^*.$$

Il vettore dei profitti in termini reali è così costituito anch'esso da una frazione di merce tipo:

$$\text{profitti} = (1-\omega)\mathbf{y}^* = \Pi(1-\omega)\mathbf{Aq}^*.$$

Il vettore dei profitti verrebbe così ad essere, grazie alla (8.23), un multiplo del vettore dei mezzi di produzione $\mathbf{Aq}^*$. Da ciò si potrebbe desumere che il saggio di profitto è calcolabile senza dover conoscere il vettore dei prezzi, e che è pari a $\pi = \Pi(1-\omega)$. A conferma di ciò osserviamo che se anche valutassimo gli aggregati $\mathbf{y}^*$ e $\mathbf{Aq}^*$ a un qualunque sistema dei prezzi $\mathbf{p}^T$ si avrebbe

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{\mathbf{p}^T\mathbf{q}^* - \mathbf{p}^T\mathbf{Aq}^* - \omega\mathbf{p}^T(\mathbf{q}^* - \mathbf{Aq}^*)}{\mathbf{p}^T\mathbf{Aq}^*} = \\
&= \frac{\cancel{\mathbf{p}^T\mathbf{q}^*} - \cancel{\mathbf{p}^T\mathbf{q}^*}\,\frac{1}{1+\Pi} - \omega(\cancel{\mathbf{p}^T\mathbf{q}^*} - \cancel{\mathbf{p}^T\mathbf{q}^*}\,\frac{1}{1+\Pi})}{\cancel{\mathbf{p}^T\mathbf{q}^*}\,\frac{1}{1+\Pi}} = \\
&= \frac{1 - \frac{1}{1+\Pi} - \omega(1 - \frac{1}{1+\Pi})}{\frac{1}{1+\Pi}} = \\
&= \Pi(1-\omega).
\end{aligned} \tag{8.25}$$

La particolare composizione della merce tipo che ricorre nel prodotto totale ($\mathbf{q}^*$), nei mezzi di produzione ($\mathbf{Aq}^*$), nel salario reale ($\omega\mathbf{y}^* =$

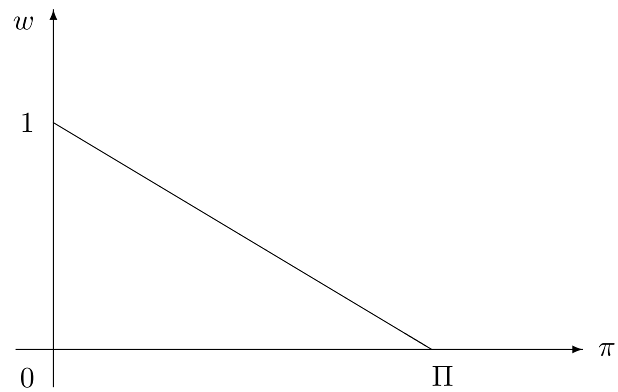


Figura 8.1: Andamento di w al variare di π nel sistema tipo e nel sistema effettivo quando si esprimono prezzi e salario in termini della merce tipo

$\omega\Pi\mathbf{Aq}^*$) e quindi nei profitti, ($(1-\omega)\mathbf{y}^* = (1-\omega)\Pi\mathbf{Aq}^*$), fa sì che i prezzi relativi si semplifichino tra numeratore e denominatore; ciò rende il saggio di profitto una grandezza conoscibile *prima* di aver determinato il sistema dei prezzi. Inoltre considerando che il valore del prodotto netto del sistema è fissato convenzionalmente pari a 1 e l'unità di misura del lavoro è la quantità di lavoro disponibile nel sistema si ha che la quota salario, ω, viene a coincidere con il salario unitario, w,

$$\omega = w,$$

cosicché la relazione (8.25) diventa una relazione tra il saggio di profitto e il salario unitario.

$$\pi = \Pi(1-w). \tag{8.26}$$

L'andamento fra queste due variabili è quello riportato nella figura 8.1.

Esempio 5.

Si consideri il sistema tipo presentato al precedente Esempio 4. Se in tale sistema il salario unitario consiste di merce tipo la relazione fra il salario unitario *e il saggio di profitto in tale sistema può così essere calcolata:*

$$\textit{salario unitario} = \omega \mathbf{y}^* = w\mathbf{y}^* = w \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\textit{profitto} = (1-\omega)\mathbf{y}^* = (1-w)\mathbf{y}^* = (1-w) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

D'altra parte si ha:

$$\textit{mezzi di produzione} = \mathbf{A}\mathbf{q}^* = \frac{1}{\Pi}\mathbf{y}^* = \frac{1}{0,25} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix};$$

di conseguenza, grazie alla proporzionalità del vettore dei profitti e del vettore dei mezzi di produzione, il saggio di profitto è:

$$\pi = 0,25(1-w).$$

Questo risultato sembrerebbe costituire la soluzione al problema di circolarità logica incontrato da Ricardo nella determinazione del saggio di profitto. Evidentemente esso è reso possibile dalle particolari proporzioni che, come si è detto, ricorrono nei tre aggregati (prodotto, mezzi di produzione e salari reali) che determinano il saggio di profitto. Tale risultato, però, non avrebbe alcuna rilevanza se non fosse generalizzabile al caso (normale) in cui le quantità prodotte e impiegate delle varie merci non si trovassero in tali proporzioni. Il risultato centrale mostrato da Sraffa è però proprio la possibilità di generalizzare la relazione (8.25)—e quindi la possibilità di calcolare il saggio di profitto senza dover conoscere i prezzi relativi—al caso generale in cui le quantità prodotte non si trovano nelle proporzioni tipo, alla sola condizione di esprimere tutti i prezzi e il salario unitario in termini di merce tipo. Esprimiamo pertanto i prezzi e il salario unitario in termini di merce tipo:

$$\mathbf{p}^T\mathbf{A}(1+\pi) + w\boldsymbol{\ell}^T = \mathbf{p}^T, \tag{8.27a}$$

$$\mathbf{p}^T\mathbf{y}^* = 1, \tag{8.27b}$$

dove—lo ripetiamo per comodità—

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \frac{1}{1+\Pi}\mathbf{y}^*, \tag{8.24a}$$

$$\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{y}^* = \frac{\Pi}{1+\Pi}. \tag{8.24b}$$

Post-moltiplicando per $\mathbf{y}^*$ la (8.27a), tenendo conto della (8.27b) e isolando π si ottiene:

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{1 - \mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{y}^* - w\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{y}^*}{\mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{y}^*} = && \qquad (8.29)\\
&= \frac{1 - \mathbf{p}^T\mathbf{y}^*\frac{1}{1+\Pi} - w\frac{\Pi}{1+\Pi}}{\mathbf{p}^T\mathbf{y}^*\frac{1}{1+\Pi}} = && \text{[grazie alle (8.24)]}\\
&= \frac{1 - \frac{1}{1+\Pi} - w\frac{\Pi}{1+\Pi}}{\frac{1}{1+\Pi}} = && \text{[grazie alla (8.27b)],}\\
&= \Pi(1-w). && \qquad (8.30)
\end{aligned}$$

Come si vede nel sistema (8.27) siamo ritornati nel sistema effettivo; il sistema (8.24) ci è servito solo per costruire il numerario. Eppure il vettore dei prezzi è ancora sparito dall'espressione della relazione tra le due variabili distributive, w e π, e l'andamento è quello descritto nella figura 8.1. La scelta di un opportuno numerario, la merce tipo, è servita per *separare* l'analisi della distribuzione da quella del valore, rendendo indipendente la prima dalla seconda; il saggio di profitto viene così a essere una variabile determinabile in maniera indipendente dal sistema dei prezzi. È questo evidentemente un risultato notevole per l'analisi ricardiana.

Ci si può domandare come una scelta apparentemente così «innocua», come la scelta di un numerario, permette di conseguire un risultato così significativo. Per rispondere a questa domanda si osservi che quando si sceglie come numerario una data merce composita $\mathbf{b}$, cioè si pone

$$\mathbf{p}^T\mathbf{b} = 1, \qquad (8.31)$$

dal sistema dei prezzi

$$\mathbf{p}^T\mathbf{A}(1+\pi) + w\boldsymbol{\ell}^T = \mathbf{p}^T \qquad (8.10')$$

è possibile ottenere una espressione che mette in relazione tra il saggio di profitto con il salario unitario: moltiplicando ambo i membri di (8.10′) per $\mathbf{b}$, tenendo conto di (8.31) e isolando π si ottiene

$$\pi = \frac{1 - \mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{b} - w\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{b}}{\mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{b}}. \qquad (8.32)$$

L'espressione a numeratore del secondo membro della (8.32) è la differenza fra il valore di una unità della merce $\mathbf{b}$ (che convenzionalmente è pari a 1 essendo $\mathbf{b}$ il numerario), il valore dei suoi mezzi di produzione ($\mathbf{p}^T\mathbf{Ab}$) e i salari pagati per produrla ($w\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{b}$). Tale differenza indica i profitti conseguiti in un'immaginaria industria aggregata[7] sulla produzione di 1 unità di merce $\mathbf{b}$. Tali profitti sono poi rapportati al valore dei mezzi di produzione in essa impiegati. Se fosse noto il valore di tali mezzi di produzione il rapporto fra queste due grandezze ci permetterebbe di determinare per ogni livello del salario unitario pagato in tale industria il saggio di profitto realizzabile dalla vendita di tale merce composita. Ma poiché sia il salario unitario che il saggio di profitto si sono supposti uniformi tra tutte le industrie tale relazione sarebbe rappresenterebbe anche la relazione tra salario unitario e saggio di profitto *in tutte le industrie* e cioè *nell'intero sistema*. L'unico problema è rappresentato dal fatto che finora non è noto il valore dei mezzi di produzione impiegati nell'industria $\mathbf{b}$.

Ma si è visto che esiste un'industria aggregata, quella che produce il sistema tipo, nella quale il prodotto e i mezzi di produzione consistono della stessa merce composita, presa in quantità diverse. In essa il saggio di profitto, noto il salario, è calcolabile senza dover conoscere i prezzi. Da quanto detto sopra questo risultato è immediatamente riferibile *all'intero sistema economico* solo fissando come numerario la merce prodotta da tale industria, che nel nostro caso è la merce tipo. Ecco che la fissazione di un opportuno numerario permette di ≪conferire trasparenza a un sistema e rendere visibile≫[8] quello che altri numerari non permettono di osservare.

Si potrebbe osservare che la costruzione della merce tipo nelle equazioni (8.19) o nelle (8.24) richiede la re-introduzione dell'ipotesi dei rendimenti di scala costanti, che Sraffa aveva esplicitamente escluso (si veda la citazione qui riportata a p. 103). Ma non c'è alcuna necessità che tale

[7] Tale industria aggregata risulterebbe dalla combinazione lineare delle industrie delle singole merci con i pesi dati dalle componenti di $\mathbf{b}$: il vettore colonna delle immissioni di tale industria sarebbe rappresentato dal vettore a $M+1$ componenti $\begin{bmatrix}\mathbf{Ab}\\ \boldsymbol{\ell}^T\mathbf{b}\end{bmatrix}$.

[8] Sraffa (1960, p. 30)

merce sia prodotta effettivamente, così come non vi è alcuna necessità che il numerario di un sistema economico rispecchi le proporzioni con cui le merci entrano nel suo prodotto netto: la sua costruzione serve sole per definire un paniere ≪ideale≫ in termini del quale esprimere i prezzi e il salario unitario.

4.7 La merce tipo come misura invariabile dei valori

Ritorniamo ora al problema originario per cui si era costruita la merce tipo: quella di individuare una misura invariabile dei valori. Si può verificare a questo punto che la merce tipo di Sraffa costituisce una misura invariabile del valore nel senso definito alla fine del precedente paragrafo 4.3. Se infatti esprimiamo tutti i prezzi e il salario unitario nei termini della merce tipo, ossia se poniamo

$$\mathbf{p}^T\mathbf{y}^* = 1 \tag{8.33}$$

e dunque sostituiamo $\mathbf{b} = \mathbf{y}^*$ nell'ultima equazione del sistema (8.16), essa prende la forma

$$(1+\pi) + w\frac{\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{y}^*}{\mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{y}^*} = \frac{1}{\mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{y}^*}; \tag{8.34-$\mathbf{y}^*$}$$

che, tenendo conto delle (8.24), diventa

$$(1+\pi) + w\frac{\frac{\Pi}{1+\Pi}}{\frac{1}{1+\Pi}\cdot\mathbf{p}^T\mathbf{y}^*} = \frac{1}{\frac{1}{1+\Pi}\cdot\mathbf{p}^T\mathbf{y}^*},$$

che, grazie alla (8.33), si riduce a

$$(1+\pi) + w\Pi = 1 + \Pi \tag{8.33$'$}$$

che coincide con la (8.30):

$$\pi = \Pi(1-w) \quad \text{o, alternativamente,} \quad w = 1 - \frac{1}{\Pi}\pi. \tag{8.30$'$}$$

Pertanto poiché la (8.33) coincide con la (8.33′), quando si usa come numerario la merce tipo il sistema (8.16) prende la forma:

$$(1+\bar{\pi}) + \bar{w}\frac{\ell_1}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_1} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_1} \tag{8.34-1}$$

$$\vdots$$

$$(1+\bar{\pi}) + \bar{w}\frac{\ell_m}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_m} = \frac{\bar{p}_m}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_m} \tag{8.34-m}$$

$$\vdots$$

$$(1+\bar{\pi}) + \bar{w}\frac{\ell_M}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_M} = \frac{\bar{p}_M}{\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{a}_M} \tag{8.34-M}$$

$$(1+\bar{\pi}) + \bar{w}\Pi = 1 + \Pi. \tag{8.34-$\mathbf{y}^*$}$$

Si vede immediatamente che il vettore dei prezzi è presente *solo* nelle equazioni (8.34-1)-(8.34-M), *non* nella (8.34-$\mathbf{y}^*$). Quindi per ripristinare il pareggio del bilancio nell'industria che produce la merce tipo in seguito a una variazione del saggio di profitto è sufficiente variare il salario secondo l'equazione (8.34-$\mathbf{y}^*$). Non è dunque necessario che essa cambi di valore rispetto ai suoi mezzi di produzione per ripristinare il pareggio del bilancio. Al variare della distribuzione del reddito i prezzi di tutte le merci dovranno variare rispetto ai propri mezzi di produzione, ma tali variazioni saranno però determinate *soltanto* dalla necessità di ripristinare il pareggio del bilancio nelle rispettive industrie, non nell'industria della merce tipo. Ciò significa che la merce tipo, se usata come numerario, rende l'effetto **(N)** nullo. Per tale ragione *la merce tipo costituisce una misura invariabile del valore*. Pertanto essa, se usata come numerario, ci permette di osservare le variazioni dei prezzi relativi di ciascuna delle merci, in risposta a cambiamenti della distribuzione del reddito, isolatamente, («come *in vacuo*», Sraffa (1960, p. 24, corsivo nell'originale), senza che esse risultino frammischiate ai disturbi che sorgono dalle «peculiarità [...] della merce che viene presa come misura» (Sraffa (1960, p. 23)).[9] Anche questo risultato deriva dalle particolari proporzioni che caratterizzano l'industria della merce tipo. Anche in questo

[9] Per ulteriori dettagli si veda Bellino (2004)

caso, il fatto che prezzi e salario vengano espressi in termini di merce tipo non implica affatto che le quantità effettivamente prodotte nel sistema siano nelle proporzioni «tipo». Le (8.24) sono servite soltanto per costruire un numerario con opportune caratteristiche. Come già osservato precedentemente ciò libera tutta la presente analisi da ipotesi relative ai rendimenti di scala.

4.8 Risoluzione del sistema dei prezzi in corrispondenza dei vari livelli del saggio di profitto

Avendo costruito una misura del valore invariabile rispetto a variazioni della distribuzione del reddito siamo ora in grado di studiare finalmente come variano i prezzi relativi delle merci al variare del saggio di profitto. Nel paragrafo precedente si è visto che esprimere i prezzi e il salario in termini di merce tipo implica che la relazione tra salario unitario e saggio di profitto sia quella indicata nell'equazione (8.30); d'altra parte si può dimostrare che, salvo casi estremamente particolari, non aventi rilevanza economica, la relazione (8.30) è ottenibile solo se si adotta come numerario la merce tipo.[10] Pertanto salvo eccezioni si ha che

$$\mathbf{p}^T\mathbf{y}^* = 1 \;\Leftrightarrow\; w = 1 - \frac{1}{\Pi}\,\pi, \quad \text{cioè che} \quad (8.33) \Leftrightarrow (8.30).$$

La fissazione del numerario può pertanto essere fatta attraverso l'equazione (8.33) o, alternativamente, attraverso la (8.30). Ciò significa, tra

[10] È stato infatti dimostrato da Miyao (1977), e poi da Abraham-Frois e Berrebi (1978), da Bidard (1978) e da Baldone (1980)), che data la matrice

$$\underset{(M,M)}{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\ell}^T \\ \boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A} \\ \boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix},$$

possono esistere altre $M - r(\mathbf{K})$ merci composite, *diverse* da $\mathbf{y}^*$, che implicano la relazione (8.30). L'esistenza di *altre* merci tipo è dunque legata alla possibilità che la matrice $\mathbf{K}$ non sia di pieno rango, cosicché $M - r(\mathbf{K}) > 0$. Ma tenendo conto che la matrice $\mathbf{A}$ e il vettore $\boldsymbol{\ell}^T$ contengono coefficienti tecnologici, il fatto che in $\mathbf{K}$ ci siano uno o più vettori linearmente dipendenti dagli altri viene a essere una pura coincidenza.

l'altro, che non è nemmeno necessario calcolare la composizione della merce tipo per esprimere prezzi e salari in termini di essa; basta calcolare il saggio massimo di profitto, Π. Quindi scrivere le equazioni

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T\mathbf{A}(1+\pi) + w\boldsymbol{\ell}^T \tag{8.35a}$$

$$w = 1 - \frac{1}{\Pi}\,\pi \tag{8.35b}$$

significa esprimere prezzi e salari in termini di merce tipo. Possiamo ora risolvere rispetto a $\mathbf{p}^T$ le equazioni (8.35a)

$$\mathbf{p}^T = w\boldsymbol{\ell}^T[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}; \tag{8.36}$$

Sostituendo la (8.35b) nella (8.36) si ottiene finalmente la soluzione del sistema dei prezzi per i diversi livelli del saggio di profitto:

$$\mathbf{p}^T = \left(1 - \frac{1}{\Pi}\,\pi\right)\cdot \boldsymbol{\ell}^T[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}. \tag{8.37}$$

Prima di indagare il significato economico dei prezzi così trovati studiamone le proprietà matematiche.

Esistenza e positività delle soluzioni. Il fattore $\left(1 - \frac{1}{\Pi}\,\pi\right)$ è positivo per

$$0 \le \pi < \Pi. \tag{8.38}$$

Inoltre $\boldsymbol{\ell} > \mathbf{o}$; da ultimo la matrice $[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}$ è un caso particolare della matrice $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1}$, che, grazie al risultato n. 5 dei teoremi di Perron-Frobenius esiste ed è semi-positiva se $0 \le t < 1/\lambda^*$ (positiva se $\mathbf{A}$ è indecomponibile). Poiché nel nostro caso $t = 1+\pi$ e ricordando la (8.9) la condizione di semi-positività della matrice inversa è $0 \le 1+\pi < 1+\Pi$, che—considerando solo i valori positivi di π—coincide con la (8.38). Pertanto per ogni $0 \le \pi < \Pi$, esiste un unico sistema dei prezzi avente significato economico.

Esempio 6. (Prezzi espressi in termini della merce tipo.) *Con riferimento al sistema considerato al precedente esempio 4 i prezzi delle merci, espressi in termini di merce tipo, sono:*

$$p_1(\pi) = \frac{5}{12(4-\pi)} \quad e \quad p_2(\pi) = \frac{3-2\pi}{6(4-\pi)}.$$

Significato economico dei prezzi. Ci si può domandare che teoria del valore è contenuta nei prezzi (8.37). A tale scopo possiamo avvalerci della formula in inversione mediante sviluppo in serie di una matrice per ri-esprimere la matrice $[\mathbf{I}-(1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}$, che è invertibile per $0 \leq \pi < \Pi$. Pertanto possiamo così ri-scrivere l'espressione della soluzione rispetto ai prezzi (8.37):

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^T &= w\boldsymbol{\ell}^T[\mathbf{I}-(1+\pi)\mathbf{A}]^{-1} = \\ &= w\boldsymbol{\ell}^T + w(1+\pi)\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A} + w(1+\pi)^2\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A}^2 + \cdots\,, \qquad (8.39)\\ &\text{dove } w = \left(1-\tfrac{1}{\Pi}\,\pi\right).\end{aligned}$$

Il generico addendo della soluzione scritta in termini di serie ha la forma

$$\left(1-\tfrac{1}{\Pi}\,\pi\right)(1+\pi)^s\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A}^s\,:$$

in ciascuno di essi compaiono i vettori $\boldsymbol{\ell}^T\mathbf{A}^s$ che, come già notato commentando la (8.15), indicano le quantità di lavoro richieste nei vari «stadi» logici in cui si svolge la produzione (la produzione finale, la produzione dei mezzi di produzione, la produzione dei mezzi di produzione dei mezzi di produzione e così via). Ora però ciascuno di tali addendi risulta moltiplicato per un fattore, $\left(1-\frac{1}{\Pi}\,\pi\right)(1+\pi)^s$, dove s indica lo stadio di produzione in cui tale lavoro è stato erogato. Le suddette quantità di lavoro risultano così «datate»: nel calcolo di ciascun prezzi si tiene cioè conto non solo della quantità di lavoro che è stata man mano immessa nel processo produttivo, ma anche del *tempo* durante il quale questa immissione è rimasta immobilizzata prima dell'ottenimento della merce finale. I prezzi sono dunque stati ricondotti a lavoro *datato*; in essi entrano dunque sia la componente *lavoro* che la componente *tempo*: le due grandezze che—assieme all'altro fattore originario (la terra)—costituiscono il «capitale».

4.9 Risoluzione del sistema dei prezzi in corrispondenza dei vari livelli del saggio di profitto con un generico numerario b

Ci si può domandare cosa sarebbe accaduto se, anziché usare come numerario la merce tipo (cioè una misura invariabile del valore) avessimo usato un qualunque altro numerario, **b**. Il sistema sarebbe ancora ovviamente risolvibile rispetto ai prezzi e al salario unitario; tuttavia tali soluzioni sarebbero più complicate, in quanto in tal caso incorporerebbero anche la variazione del valore del numerario rispetto ai suoi mezzi di produzione. Per vedere ciò riprendiamo le equazioni dei prezzi espressi in termini del generico numerario **b**:

$$\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T\mathbf{A}(1+\pi) + \boldsymbol{\ell}^T w \tag{8.40a}$$

$$\mathbf{p}^T\mathbf{b} = 1. \tag{8.40b}$$

Isolando $\mathbf{p}^T$ nella (8.40) si ottiene

$$\mathbf{p}^T = w\boldsymbol{\ell}^T[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}. \tag{8.41}$$

Sostituendo la (8.41) nella (8.40b) e risolvendo rispetto a w si ottiene:

$$w = \frac{1}{\boldsymbol{\ell}^T[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{b}} =: w(\pi). \tag{8.42}$$

Sostituendo ora la (8.42) nella (8.41) si ottiene la soluzione del sistema rispetto ai prezzi:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^T &= w(\pi)\boldsymbol{\ell}^T[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1} = \\ &= \frac{1}{\boldsymbol{\ell}^T[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\ell}^T[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1} =: \mathbf{p}^T(\pi).\end{aligned} \tag{8.43}$$

La (8.42) e la (8.43) costituiscono la soluzione del sistema (8.40) rispetto al salario unitario e rispetto ai prezzi per ogni dato livello del saggio di profitto quando si fissa un generico numerario **b**.

Cominciamo a fissare l'attenzione sulla (8.42): rispetto alla (8.30) l'espressione analitica di questa relazione tra il salario unitario e il saggio di profitto è notevolmente più complicata: gli elementi della matrice inversa saranno dei rapporti fra polinomi in π di grado $M-1$ (i complementi algebrici degli elementi di $[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]$) e un polinomio di grado M in π (il determinante di questa matrice), cioè $P_{mi}^{M-1}(\pi)/Q^M(\pi)$; tutti questi elementi sono ponderati dai coefficienti di lavoro, ℓ_m, e dalle componenti del numerario, b_i, e sono poi sommati tra loro, cioè

$\sum_m \sum_i \ell_m [P_{mi}^{M-1}(\pi)/Q^M(\pi)] b_i$; il tutto poi è invertito; si ottiene pertanto un rapporto fra un polinomio di grado M in π e un polinomio di grado $M-1$ in π: $Q^M(\pi)/P^{M-1}(\pi)$. Questa complessità rispecchia evidentemente i fenomeni di interdipendenza fra prezzi e distribuzione riemersi a causa della scelta di un numerario non invariabile. È possibile comunque dire qualcosa in più circa le proprietà analitiche della relazione (8.42). La matrice inversa $[\mathbf{I}-(1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}$ è un caso particolare della matrice $(\mathbf{I}-t\mathbf{A})^{-1}$ presa in esame nei teoremi di Perron-Frobenius, dove $t = 1+\pi$. Dal risultato n. 5 si ha che essa è semi-positiva (positiva se $\mathbf{A}$ è indecomponibile) per $0 \leq t < 1/\lambda^*$; inoltre i suoi elementi sono funzioni continue e non-decrescenti (crescenti se $\mathbf{A}$ è indecomponibile) di t per $0 \leq t < 1/\lambda^*$. Pertanto gli elementi di $[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1}$ saranno non-negativi e saranno funzioni continue e non-decrescenti di π per $0 \leq \pi < \Pi$ (positivi e crescenti se $\mathbf{A}$ è indecomponibile). Quindi w sarà una funzione positiva e non-crescente (decrescente se $\mathbf{A}$ è indecomponibile) di π. Il suo andamento potrebbe essere quello descritto nella figura 8.2.[11]

Da ciò si può vedere come la relazione (8.42) sia in grado di determinare una variabile distributiva nota l'altra: seguendo la strada di Sraffa di considerare il saggio di profitto dato esogenamente rispetto al sistema dei prezzi la (8.42) permette di conoscere il salario unitario. Ma anche seguendo il modo di procedere di Ricardo si può vedere che essa, dato il salario unitario (ad esempio fissato al livello della sussistenza) essa permette di conoscere il saggio di profitto. Ecco quindi il problema ricardiano di determinazione del saggio di profitto è qui risolto nella sua interezza: nella sezione 4.6 si era visto come era possibile determinare π senza dover passare dal sistema dei prezzi (attraverso la relazione (8.30)) grazie all'utilizzo di un particolare numerario che ci ha permesso di eliminare l'interdipendenza fra prezzi e distribuzione del reddito; qui

[11] Il punto $\pi = \Pi$ non appartiene al campo di esistenza di $w(\pi)$, in quanto in corrispondenza di esso la matrice a denominatore della (8.41) non è invertibile (per la (8.9) infatti si avrebbe $\det[\mathbf{I} - (1+\Pi)\mathbf{A}] = \det[\mathbf{I} - (\lambda^*)^{-1}\mathbf{A}] = (\lambda^*)^{-1} \cdot \det(\lambda^*\mathbf{I} - \mathbf{A}) \equiv 0$). Tuttavia tenendo conto di ciò si ha $\lim_{\pi\to\Pi} w(\pi) = \dfrac{1}{\boldsymbol{\ell}^T \cdot \lim_{\pi\to\Pi} \dfrac{1}{\det\,[\mathbf{I}-(1+\pi)\mathbf{A}]} \cdot [\mathbf{I}-(1+\pi)\mathbf{A}]^+ \cdot \mathbf{b}} = 0.$

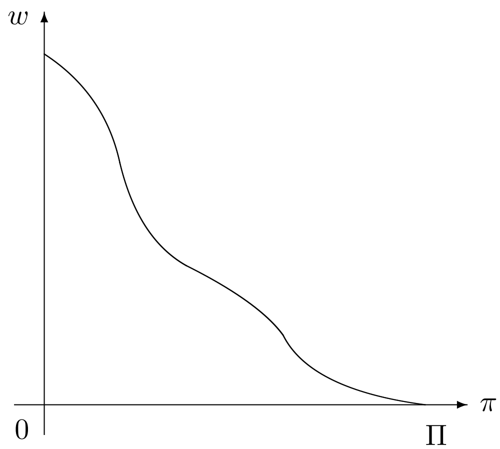


Figura 8.2: Andamento del salario unitario rispetto al saggio di profitto quando prezzi e salari sono espressi in termini di un numerario generico **b**.

vediamo che anche se scegliessimo un generico numerario, **b**, che non è in grado di eliminare tale interdipendenza, la relazione (8.42) permette di calcolare il saggio di profitto noto il salario unitario. Ciò che sembrava un problema insormontabile per Ricardo, in quanto sembrava un ragionamento ≪circolare≫, si può superare, come si vede, risolvendo un sistema di equazioni interdipendenti. Inoltre, come si vede, l'andamento della relazione (8.42) evidenzia ancora l'esistenza di un *trade-off* tra salari e profitti. Il dover passare attraverso l'interdipendenza fra prezzi e distribuzione complica soltanto, ma non impedisce, né di determinare il saggio di profitto una volta noto il salario, né di cogliere come l'aumento di una variabile distributiva debba necessariamente accompagnarsi alla riduzione dell'altra. La relazione (8.30) mostra il legame fra le due variabili distributive per così dire ≪allo stato puro≫, in termini fisici; la relazione (8.42) mostra il legame tra esse congiuntamente alle complicazioni derivanti dalla variazione dei prezzi relativi al variare della distribuzione del reddito.

Esempio 7. (Relazione tra π e w espresso in termini di un generico numerario **b**). *Con riferimento al sistema considerato nel precedente esempio*

4 calcoliamo la relazione $w(\pi)$ che si ottiene usando un generico numerario $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Calcoliamo dapprima la matrice inversa

$$[\mathbf{I} - (1+\pi)\mathbf{A}]^{-1} = \frac{5/4}{\left(\frac{1}{4} - \pi\right)(4-\pi)} \cdot \begin{bmatrix} 3-2\pi & 2+2\pi \\ 1+\pi & 2-3\pi \end{bmatrix}.$$

La relazione $w(\pi)$ è dunque

$$w(\pi) = \frac{48\left(\frac{1}{4} - \pi\right)(4-\pi)}{5b_1 + 6b_2 - 4b_2\pi}.$$

È dal ultimo immediato verificare la semi-positività dei prezzi (8.43) espressi in termini del generico numerario $\mathbf{b}$, in quanto per le ragioni viste in precedenza tutti gli elementi a secondo membro della (8.43) sono semi-positivi per

$$0 \leq \pi < \Pi$$

(positivi se $\mathbf{A}$ è indecomponibile).

Esempio 8. (Prezzi espressi in termini di un generico numerario $\mathbf{b}$.) *Con riferimento al sistema considerato nel precedente esempio 4 i prezzi delle due merci, espresse in termini del generico numerario* $\mathbf{b}$ *saranno:*

$$p_1(\pi) = \frac{5}{5b_1 + 6b_2 4 - b_2\pi} \qquad p_2(\pi) = \frac{6 - 4\pi}{5b_1 + 6b_2 4 - b_2\pi}.$$

Confrontando le espressioni trovate per i prezzi in corrispondenza dei diversi livelli del saggio di profitto espressi in termini di merce tipo (eq. (8.37)) e in termini di un numerario qualunque (eq. (8.43)), si vede come la seconda espressione è più complicata della prima, in quanto, come detto nella sezione 4.3, i prezzi delle varie merci devono variare, nel caso della (8.37), solo per ripristinare il pareggio del bilancio nella propria industria, nel caso della (8.43) anche per ripristinare il pareggio del bilancio nell'industria che produce il numerario $\mathbf{b}$.

Capitolo 9

La scelta della tecnica di produzione

1 Processi di produzione, tecniche e tecnologia

Nell'analisi svolta nel capitolo precedente si è supposto che ci fosse una sola tecnica di produzione rappresentata dalla matrice dei coefficienti interindustriali $\mathbf{A}$ e dal vettore dei coefficienti di lavoro diretto $\boldsymbol{\ell}^T$. Nella realtà è però verosimile che per ciascuna merce esistano più metodi di produzione. Ci proponiamo ora di indagare come avviene il processo di scelta della tecnica di produzione. Svolgiamo questa analisi ancora limitatamente al caso di produzione singola; inoltre supporremo, a differenza di quanto fatto nel capitolo precedente, che nel sistema prevalgano rendimenti di scala costanti.

Introduciamo ora alcune definizioni. Chiameremo "processo di produzione" o "processo produttivo" di una generica merce m una possibile combinazione di immissioni di merci e di lavoro necessarie a produrre una unità di merce m; analiticamente un processo di produzione di una merce è rappresentabile da un vettore a $M+1$ elementi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \ell_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{Mm} \\ \ell_m \end{bmatrix}$$

Chiameremo "tecnica di produzione" un insieme di processi di produzione che include uno e un solo processo per ciascuna merce; una tecnica di produzione è rappresentabile analiticamente da una matrice di tipo

$(M+1, M)$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\ell}^T \end{bmatrix}.$$

Poiché come si diceva prima possono esistere più processi alternativi di produzione delle singole merci, esisteranno diverse tecniche di produzione a livello dell'intero sistema: esse saranno ottenute combinando in tutti i modi possibili i i diversi processi, in maniera che in ciascuna di tali tecniche ci sia uno e un solo processo di produzione per ciascuna merce. Indichiamo con

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^\alpha \\ \ell^{T\alpha} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\beta \\ \ell^{T\beta} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\omega \\ \ell^{T\omega} \end{bmatrix}$$

l'insieme di tutte le tecniche alternative esistenti nel sistema economico. Indaghiamo ora come avviene la scelta della tecnica produttiva effettivamente impiegata nel sistema. Chiameremo "tecnologia del sistema" l'insieme di tutte le tecniche di produzione. Supponiamo, per semplicità, che tutte le M merci siano merci base.[1]

2 Scelta della tecnica

Per descrivere come il sistema seleziona una fra le diverse tecniche adottabili è necessario introdurre un criterio di scelta. Seguendo la letteratura esistente sull'argomento appare ragionevole pensare che in ciascuna industria gli imprenditori selezionino il processo di produzione che, dato il saggio di profitto, comporta il costo minimo. Si può a questo punto intuire (e si può dimostrare rigorosamente[2]) che l'adozione di tale criterio a livello di singola industria fa sì che il sistema nel suo insieme sia nella condizione di poter pagare in ogni industria, per ogni dato saggio di profitto, il salario unitario più elevato o, alternativamente, per ogni dato livello del salario unitario, il saggio di profitto più elevato. Questo

[1]Come si vedrà più avanti questa semplificazione, che esclude diversi casi di interesse, è accettabile ai fini dell'analisi sviluppata in questo capitolo.

[2]Si veda, ad esempio, Levhari (1965, pp. 99–102) e, successivamente, Garegnani (1968, sezioni 7 and 8), Pasinetti (1975, capitolo 6, sezioni 4 e 5) e Kurz e Salvadori (1994, capitolo 5).

criterio di selezione ammette una rappresentazione grafica molto efficace. A partire da quanto si è visto nella sezione 4.9 del capitolo 8 si deduce che a ciascuna tecnica è possibile associare una relazione tra il saggio di profitto e il salario unitario espresso in termini di una data merce. Se tutti i prezzi e il salario unitario vengono espressi nei termini della medesima merce numerario, **b**, tali relazioni possono essere rappresentate sullo stesso grafico (vedi il grafico in alto della figura 9.1, dove si sono rappresentate le relazioni fra w e π generate da tre tecniche alternative, α, β e γ. Da una semplice osservazione del primo grafico della figura 9.1 appare dunque chiare che il criterio della minimizzazione dei costi a livello di ciascuna singola industria fa sì che il sistema si trovi su un punto dell'inviluppo esterno delle relazioni fra il salario unitario e il saggio di profitto. Con riferimento alle tre relazioni tra il salario unitario e il saggio di profitto rappresentate nel primo grafico della figura 9.1, quelle generate rispettivamente dalle tecniche α, β e γ, si può vedere immediatamente che la tecnica γ è una tecnica superata, in quanto, per ogni dato livello del saggio di profitto, permette di ottenere un salario unitario più basso di quello ottenibile con una delle altre due tecniche. Seguendo il criterio prima richiamato la tecnica γ non sarà mai adottata dal sistema. Per quanto riguarda le altre due tecniche la scelta dipenderà dal livello del saggio di profitto: se accade che $0 \leq \pi < \pi_1$ il sistema adotterà la tecnica α; se accade che $\pi_1 < \pi < \pi_2$ il sistema adotterà la tecnica β; per $\pi_2 < \pi \leq \Pi^\alpha$ "ritorna" a essere adottata la tecnica α. Questo fenomeno è stato chiamato "ritorno delle tecniche". I punti π_1 e π_2 sono detti "punti di mutamento": in corrispondenza di essi due (o più) tecniche risultano equi-redditizie: risulta cioè indifferente adottare l'una o l'altra tecnica o una combinazione lineare di entrambe.

3 Il ritorno delle tecniche e l'inversione dell'intensità capitalistica

Il fenomeno del ritorno delle tecniche prima evidenziato è stato al centro di un lungo dibattito fra gli economisti negli anni '60, in quanto a partire da esso è stata formulata una critica alla logica della teoria marginalista del capitale e della distribuzione del reddito: tale critica ha sostanzial-

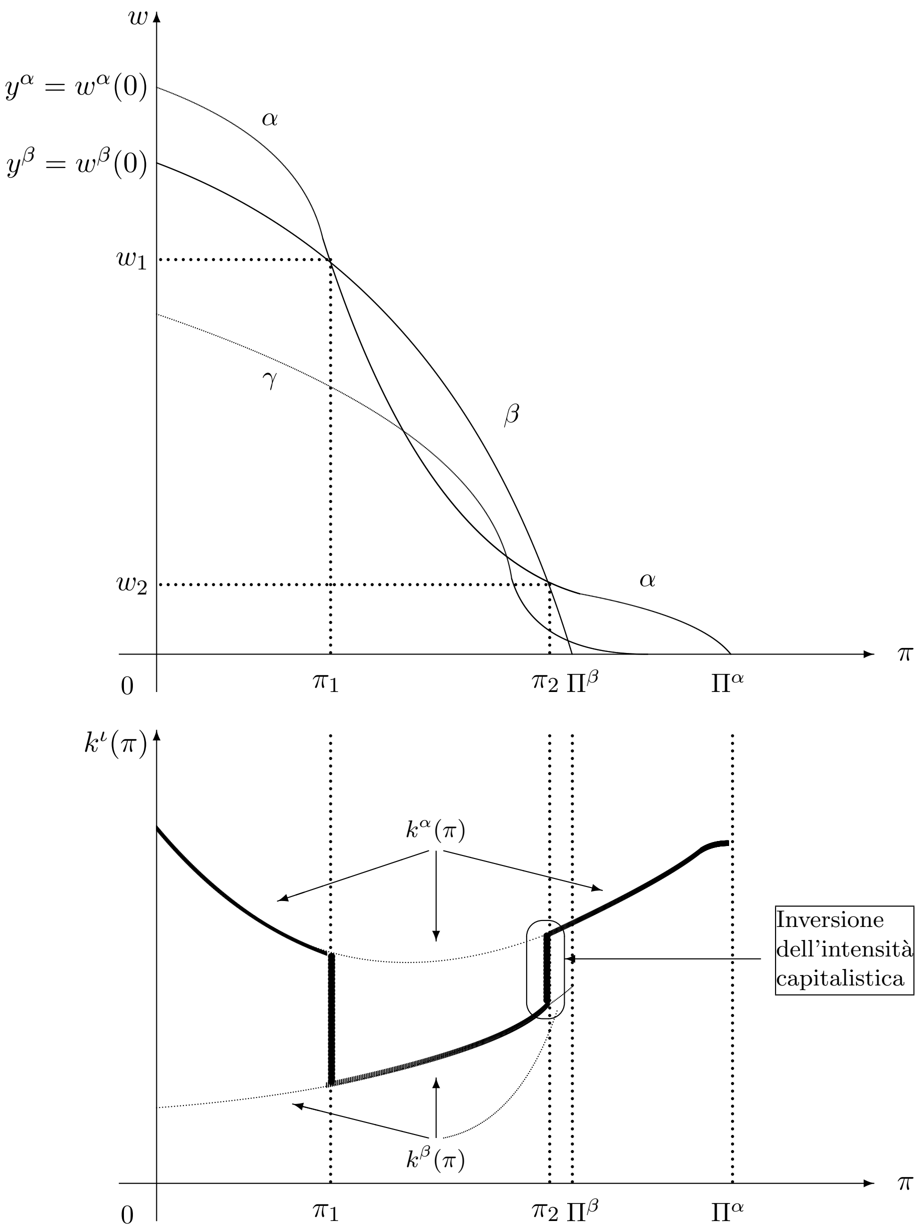


Figura 9.1: Ritorno delle tecniche e inversione dell'intensità capitalistica

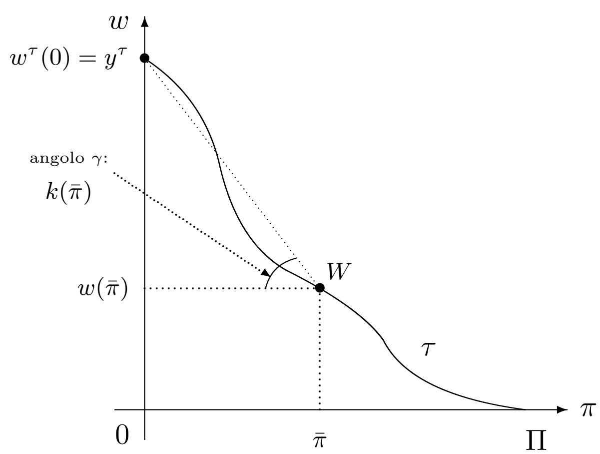


Figura 9.2: Andamento del salario unitario rispetto al saggio di profitto quando prezzi e salari sono espressi in termini di un numerario generico **b**.

mente evidenziato che in un'economia in cui il "capitale" è costituito da un insieme eterogeneo di merci, la relazione fra il saggio di profitto e il valore del capitale per lavoratore (e fra il saggio di profitto e il valore del prodotto per lavoratore) non ha l'andamento monotono e decrescente previsto dalla teoria marginalista della produzione. Tale risultato ha effetti particolarmente dirompenti per la teoria marginalista in quanto mette in dubbio il principio della "sostituibilità" fra capitale e lavoro, principio sul quale si regge tutta l'impalcatura della teoria della distribuzione del reddito (la determinazione delle remunerazioni dei fattori) basata sulla nozione di produttività marginale e su domanda e offerta dei fattori.

Per capire le ragioni di ciò vediamo come è possibile "leggere" il valore del capitale per lavoratore e il valore del prodotto per lavoratore dal grafico della relazione fra il salario unitario e il saggio di profitto corrispondente a una determinata tecnica τ, $\tau = \alpha, \beta, \ldots, \omega$.

Si osservi la figura 9.2. Si supponga inizialmente di fissare $\pi = 0$, cioè di attribuire tutto il prodotto netto ai lavoratori; in tal caso il salario unitario corrispondente alla tecnica τ, $w^\tau(0)$, coinciderà con il valore del prodotto netto per lavoratore ottenibile con la tecnica τ, cioè $w^\tau(0) = y^\tau$; graficamente questa grandezza è misurata dall'intercetta all'origine della relazione tra il salario unitario e il saggio di profitto corrispondente alla tecnica τ. Si fissi ora il saggio di profitto a un qualunque livello $\bar{\pi}$: $w(\bar{\pi})$ sarà il salario unitario, ossia il salario per lavoratore; la parte rimanente, misurata dalla differenza $y^\tau - w(\bar{\pi})$, misura dunque il profitto per lavoratore associato alla tecnica τ. Il rapporto

$$\frac{y^\tau - w^\tau(\bar{\pi})}{\bar{\pi}} = \frac{\text{valore del profitto per lavoratore}}{\text{saggio di profitto}} = k^\tau(\bar{\pi})$$

è il valore del capitale per lavoratore associato alla tecnica τ quando il saggio di profitto è fissato al livello $\bar{\pi}$; geometricamente tale rapporto è misurato dall'opposto del coefficiente angolare della retta passante per i punti y^τ, di coordinate $(0, y^\tau)$, e W, di coordinate $[\bar{\pi}, w(\bar{\pi})]$, la cui equazione è

$$w = y^\tau - \frac{y^\tau - w(\bar{\pi})}{\bar{\pi}} \cdot \pi.$$

Consideriamo cosa avviene in corrispondenza di un mutamento di tecnica; nel grafico in alto della figura 9.1 cominciamo a esaminare il passaggio dalla tecnica α alla tecnica β che si verifica per $\pi = \pi_1$. Poiché $y^\alpha > y^\beta$ si ha che $y^\alpha - w^\alpha(\pi_1) > y^\beta - w^\beta(\pi_1)$ e quindi che

$$k^\alpha(\pi_1) \equiv \frac{y^\alpha - w^\alpha(\pi_1)}{\pi_1} > \frac{y^\beta - w^\beta(\pi_1)}{\pi_1} \equiv k^\beta(\pi_1). \tag{9.1}$$

Da ciò possiamo concludere che un *aumento* del saggio di profitto intorno a π_1 induce un mutamento di tecnica (dalla α alla β) che comporta una *riduzione* del valore del capitale per lavoratore. Questo *legame inverso* fra saggio di profitto e valore del capitale per lavoratore conferma quanto previsto dalla teoria marginalista della produzione.

Vediamo però cosa succede in occasione del ritorno alla tecnica α quando il saggio di profitto supera il livello π_2. Poiché $y^\alpha > y^\beta$ si ha ancora che $y^\alpha - w^\alpha(\pi_2) > y^\beta - w^\beta(\pi_2)$ e quindi

$$k^\alpha(\pi_2) \equiv \frac{y^\alpha - w^\alpha(\pi_2)}{\pi_2} > \frac{y^\beta - w^\beta(\pi_2)}{\pi_2} \equiv k^\beta(\pi_2). \tag{9.2}$$

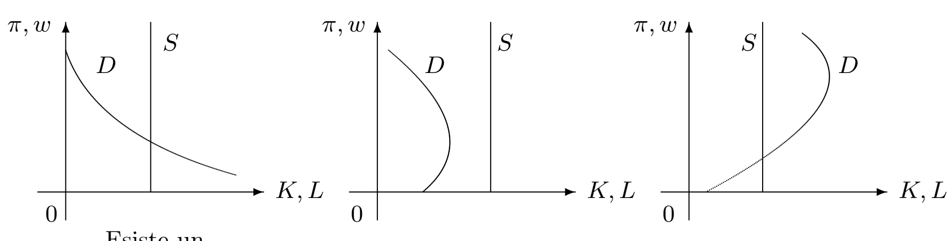
Da ciò si vede che un *aumento* del saggio di profitto intorno a π_2 induce un mutamento di tecnica (dalla β alla α) che questa volta comporta una *aumento* del valore del capitale per lavoratore. Tale fenomeno è stato chiamato *inversione dell'intensità capitalistica*. In corrispondenza del punto di mutamento $\pi = \pi_2$ è dunque venuto meno il *legame inverso* fra il saggio di profitto e il valore del capitale per lavoratore: da ciò si conclude che la monotonicità inversa fra saggio di profitto e valore del capitale per lavoratore, che economicamente esprime il principio della sostituzione tra capitale e lavoro, non ha validità generale in un sistema in cui esiste più di un bene capitale! L'andamento tra il saggio di profitto e il valore del capitale per lavoratore può essere espresso da una curva come quella rappresentata nel secondo grafico della figura 9.2.[3] Tenendo conto di come il principio della sostituzione tra fattori produttivi sia alla base di tutta la logica di determinazione della distribuzione del reddito in base alla domanda e all'offerta dei fattori (basta ricordare in quante delle deduzioni fatte nel capitolo si è utilizzato il fatto che $\phi'(q/w) < 0$), si capisce immediatamente quanto sia devastante per la teoria marginalista il risultato appena evidenziato.[4]

[3]Lo stesso grafico mostra anche come in corrispondenza di ciascun mutamento di tecnica vi sia una variazione *discontinua*, un "salto", del valore del capitale per lavoratore; ciò è dovuto al fatto che in corrispondenza di un mutamento di tecnica si ha, per almeno un'industria, una variazione dei coefficienti tecnologici che in generale è *discontinua* . È stato dimostrato (Bellino (1993)) che tali discontinuità non si "smussano" al crescere del numero delle tecniche; anzi, paradossalmente, tante più tecniche sono presenti tanto più "irregolare" è l'andamento delle quantità impiegate dei vari fattori produttivi e di conseguenza del valore del capitale per lavoratore al variare del saggio di profitto. La diversità con cui prendono forma i mutamenti di tecnica in questo schema mostra la totale inadeguatezza della tradizionale rappresentazione dei mutamenti di tecnica attraverso variazioni *continue* di un singolo fattore alla volta.

[4]Si osservino soltanto le conseguenze negative che si avrebbero per l'*esistenza* e la *stabilità* dell'equilibrio laddove si verificasse il fenomeno dell'inversione dell'intensità capitalistica: in tal caso la funzione di domanda di un fattore potrebbe presentare uno o più tratti crescenti, con le conseguenze evidenziate nel secondo e nel terzo grafico della figura seguente.

4 Le reazioni degli economisti neoclassici

Vista la portata di queste conclusioni nei confronti della teoria marginalista della produzione ci sono stati numerosi tentativi, da parte degli autori marginalisti, di circoscrivere dei casi in cui i risultati tradizionali continuassero a valere. Il primo esempio in questa direzione, che vedremo nella sezione in appendice al presente capitolo, è stato quello di Samuelson (1962) di costruire una funzione "surrogata" della produzione a partire da uno schema di produzione multisettoriale simile a quelli finora considerati. Si è visto dal paragrafo precedente come i vari problemi emersi per la teoria tradizionale del capitale siano originati dal fenomeno del ritorno delle tecniche, o meglio dal fatto che le relazioni $w(\pi)$ corrispondenti a diverse tecniche possano intersecarsi più di una volta nel quadrante positivo. Il tentativo di Samuelson è stato quello di costruire un modello multisettoriale nel quale le relazioni fra salario unitario e saggio di profitto corrispondenti alle diverse tecniche sono tutte lineari, così da non potersi intersecare fra loro più di una volta. Samuelson stesso riconosce però nel suo lavoro che tale possibilità si verifica soltanto nel caso particolare di uniformità del rapporto capitale/lavoro fra i vari settori.[5] Qualche anno dopo un suo allievo, David Levhari ha cercato di dimostrare che benché il fenomeno del ritorno delle tecniche si possa verificare a livello di singola industria esso non si può verificare



Esiste un equilibrio stabile (caso standard)

Non esiste l'equilibrio

Equilibrio instabile

(casi di inversione dell'intensità capitalistica)

[5] Come è stato fatto notare da Pasinetti (1975, p.219n) "[è] curioso che questa sia precisamente la stessa ipotesi restrittiva che aveva messo in difficoltà sia Ricardo che Marx, impedendo loro di estendere al caso generale le loro teorie del valore lavoro. Samuelson è caduto nello stesso tranello."

a livello dell'intero sistema, a condizione che la matrice dei coefficienti tecnologici sia indecomponibile (cfr. Levhari (1965)). È stato però dimostrato da Pasinetti (1965a) che tale dimostrazione conteneva un errore: Levhari e Samuelson (1966) hanno riconosciuto l'errore; tutto ciò ha dato luogo a un vivace dibattito a cui hanno preso parte diversi economisti, tra cui Pasinetti, Morishima, Garegnani, Bruno, Burmeister e Sheshinsky (si veda A.A.V.V. (1966); si vedano, inoltre i successivi lavori di Spaventa (1968), Pasinetti (1969) e Garegnani (1970)). È stato così definitivamente riconosciuto che a livello logico la teoria neoclassica aggregata della produzione e della distribuzione poggia su un fondamento che non trova riscontro in uno schema disaggregato: il fenomeno di sostituzione fra capitale e lavoro. Alcuni autori neoclassici hanno riconosciuto che la loro teoria della distribuzione del reddito, nella versione aggregata, non poteva più essere considerata rigorosa: al limite poteva servire come prima approssimazione; per un'analisi rigorosa si sarebbe dovuti tornare allo schema disaggregato di equilibrio economico generale; tuttavia, come evidenziato nella sezione 3.5, per includere il capitale in questo schema era necessario riferirsi alla versione intertemporale, con tutti i limiti interpretativi che tale nozione porta con sé.[6] Altri autori hanno cercato di minimizzare la portata di questi risultati negativi, riducendoli a dei fenomeni "paradossali" o a problemi statistici di aggregazione del capitale. Col passare del tempo queste critiche sono state man mano ridotte a degli avvertimenti al lettore, condensati per lo più in una nota a piè di pagina iniziale. Da ultimo ci si è completamente dimenticati di esse, senza che però fosse sopraggiunta una qualsiasi ragione scientifica che giustificasse questa dimenticanza: sia nei testi introduttivi che in quelli specializzati il modello marginalista aggregato costituisce ancor oggi uno dei modelli teorici di base della macroeconomia (si vedano, ad esempio, Blanchard (1998) o, a un livello più avanzato, Heijdra e van der Ploeg (2002)).

Non è questa la sede per indagare le ragioni di tale evoluzione dell'analisi economica. Sicuramente il mancato sviluppo di un paradigma

[6] È stato sostenuto da Garegnani (2003) che il fenomeno del ritorno delle tecniche e dell'inversione dell'intensità capitalistica inficiano anche i fondamenti dei modelli neoclassici disaggregati di equilibrio generale intertemporale.

teorico alternativo a quello dominante è tra le cause principali della dimenticanza delle critiche qui evidenziata e del mantenimento del paradigma dominante. Mentre in effetti c'è stata coesione nella formulazione di una critica alla logica della teoria neoclassica della produzione non c'è stata uguale compattezza nell'elaborazione di uno schema alternativo.[7] Tutto ciò evidenzia comunque che il compito di contribuire alla costruzione di un paradigma di analisi alternativo a quello neoclassico, in tutte le sue forme, è quanto mai necessario e urgente.

Appendice: La funzione surrogata della produzione

In questa appendice si ripropone il tentativo di Samuelson (1962) di "salvare" la teoria marginalista dal problema del ritorno delle tecniche. Consideriamo un sistema in cui vi sono due industrie, una che produce un bene di consumo impiegando lavoro ed un bene capitale e l'altro che produce il bene capitale impiegando lavoro ed il bene capitale stesso. Per semplicità supponiamo che entrambe le industrie producano in regime di rendimenti di scala costanti; una unità di bene capitale è così prodotta impiegando, rispettivamente, k_k unità di bene capitale e ℓ_k unità di lavoro; una unità di bene di consumo è prodotta impiegando k_c unità di bene capitale e ℓ_c unità di lavoro. La tecnica del sistema risulta è in questo caso decomponibile (il bene capitale è un bene base, il bene di consumo è un bene non-base), ed è rappresentabile mediante la seguente matrice dei coefficienti tecnologici e dal seguente vettore dei coefficienti di lavoro diretto:

$$\begin{bmatrix} k_k & k_c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \ell_k & \ell_c \end{bmatrix}. \tag{9.3}$$

Le equazioni dei prezzi generate da questa tecnica sono:

$$p_k = (1+\pi)p_k k_k + w\ell_k, \tag{9.4a}$$

$$p_c = (1+\pi)p_k k_c + w\ell_c. \tag{9.4b}$$

dove p_k e p_c indicano il prezzo del bene di consumo ed il prezzo del bene capitale. Esprimendo tutti i prezzi in termini del bene di consumo, ossia ponendo $p_c = 1$, e sostituendo una equazione del sistema (9.4) nell'altra si riesce a eliminare p_k e a esprimere w in funzione di π:

$$w = \frac{1 - k_c(1+\pi)}{l_c + (\ell_k k_c - \ell_c k_k)(1+\pi)}. \tag{9.5}$$

La (9.5) è la relazione fra salario unitario e saggio di profitto generata dalla tecnica (9.3). La (9.5) è, in generale, una relazione non-lineare (è un'iperbole); se

[7] I due principali filoni di ricerca alternativi sono stati introdotti da Garegnani e de Pasinetti, ma su linee non convergenti (si veda, ad esempio, Garegnani (1976), (1984) e Pasinetti (1965b), (1984) e (1993)).

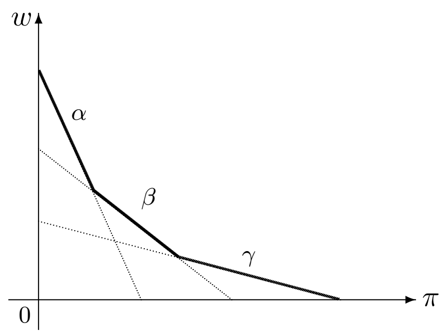


Figura 9.3: Caso con tre tecniche *à la* Samuelson

però accadesse che $\ell_k k_c - \ell_c k_k = 0$, ossia se

$$\frac{k_k}{\ell_k} = \frac{k_c}{\ell_c}, \tag{9.6}$$

la relazione (9.5) diventerebbe lineare:

$$w = \frac{1 - k_k}{\ell_c} - \frac{k_k}{\ell_c}\pi. \tag{9.7}$$

Si è già visto precedentemente come l'intercetta all'origine della relazione tra il salario unitario e il saggio di profitto misura il valore del prodotto per lavoratore, cioè $(1 - k_k)/\ell_c = y$. Si è inoltre visto che per ogni dato livello del saggio di profitto $\bar{\pi}$ il valore del capitale per lavoratore di una data tecnica è misurato dal coefficiente angolare della retta passante per l'intercetta all'origine di tale curva e il punto di coordinate $[\bar{\pi}, w(\bar{\pi})]$; poiché la relazione $w(\pi)$ è lineare tale retta coincide con la relazione $w(\pi)$ stessa, e quindi $k_k/\ell_c = k$; la retta (9.7) può dunque essere scritta nella forma:

$$w = y - k\pi. \tag{9.8}$$

Si supponga a questo punto che nel sistema economico siano conosciute diverse tecniche produttive alternative; all'interno di ciascuna tecnica, però, il rapporto capitale/lavoro è lo stesso per le due industrie; cambiando tecnica tale rapporto cambierà nello stesso modo per entrambe le industrie. Ciascuna di queste tecniche è dunque caratterizzata dalla linearità delle relazioni $w(\pi)$ da esse generate (si veda la figura 9.3). Tali tecniche devono tutte essere composte da coefficienti tecnologici che rispettano la (9.6). In questo modo Samuelson riesce a costruire una frontiera tecnologica—la spezzata costituita dai segmenti in grassetto nella figura 9.3—lungo la quale non si hanno "ritorni" di tecnica.

In questa economia si può vedere facilmente che sono verificate tutte le proposizioni dell'analisi tradizionale del capitale. Dalla Figura 9.3 si vede che al crescere del

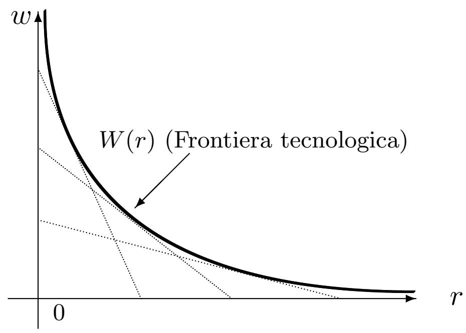


Figura 9.4: Caso con infinite tecniche *à la* Samuelson

saggio di profitto vengono adottate tecniche che richiedono un ammontare di capitale per lavoratore via via più basso e che danno origine ad un prodotto per lavoratore il cui valore è sempre più basso: muovendosi infatti lungo la spezzata che costituisce la frontiera tecnologica, al crescere di π si passa man mano a rette aventi minore coefficiente angolare (in valore assoluto) e minore intersezione con l'asse verticale.

Si può anche andare oltre: da tale schema è possibile ottenere una relazione fra ammontare di capitale per lavoratore e valore del prodotto per lavoratore che presenta tutte le caratteristiche di una funzione di produzione: una funzione "surrogata" di produzione. Per vedere tutto ciò supponiamo che il numero delle tecniche produttive conosciute nel sistema sia molto elevato, o meglio tenda a crescere indefinitamente, così che, al limite, la frontiera tecnologica, inviluppo esterno delle varie relazioni $w(\pi)$, tenda a diventare una curva liscia (continua e derivabile), e ciascuna tecnica compaia sulla frontiera tecnologica per un tratto che tende a diventare sempre più piccolo, fino a ridursi a un singolo punto. In tal caso si ha, come nel modello marginalista, un continuo mutamento di tecnica al variare del saggio di profitto: qualsiasi variazione, per quanto piccola, del saggio di profitto rende sempre conveniente l'adozione di un'altra tecnica (si veda la Figura 9.4). Supponiamo, per esempio, che l'inviluppo delle infinite relazioni lineari $w(\pi)$ corrispondenti alle infinite tecniche sia costituito da un'iperbole equilatera, di equazione

$$w = W(\pi) = H/\pi \tag{9.9}$$

dove H rappresenta una costante positiva. Ricaviamo ora le condizioni per cui la retta (9.7), risulti tangente all'iperbole (9.9) in corrispondenza di un dato livello del saggio di profitto, $\pi = \bar{\pi}$. In primo luogo essa dovrà avere coefficiente angolare pari all'inclinazione dell'iperbole nel punto $\bar{\pi}$, ossia

$$k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\pi}\left(\frac{H}{\pi}\right)\bigg|_{\pi=\bar{\pi}}$$

e quindi

$$k = \frac{H}{\bar{\pi}^2};$$

in secondo luogo la retta (9.7) e l'iperbole (9.9) dovranno intersecarsi per $\pi = \bar{\pi}$, e quindi

$$\frac{H}{\bar{\pi}} = y - k\pi = y - \frac{H}{\bar{\pi}}\pi,$$

ossia

$$y = \frac{2H}{\bar{\pi}}.$$

Poiché questo ragionamento può essere ripetuto per ogni valore di π possiamo scrivere

$$y = \frac{2H}{\pi} \quad \text{e} \quad k = \frac{H}{\pi^2}. \tag{9.10}$$

Si è così ottenuto quanto si voleva: dalle (9.10) emerge chiaramente come nello schema a due settori considerato da Samuelson il valore del prodotto per lavoratore e l'ammontare di capitale per lavoratore siano delle funzioni continue monotoniche ed inverse del saggio di profitto, proprio come nel modello marginalista tradizionale. Inoltre le (9.10) definiscono parametricamente la una funzione "surrogata" della produzione: sostituendo l'una nell'altra le (9.10) in modo da eliminare il parametro π si ottiene l'espressione di tale funzione surrogata di produzione:

$$y = f(k) = h\sqrt{k}, \tag{9.11}$$

dove $h = 2\sqrt{H} > 0$. La (9.11) è una tipica funzione di produzione di tipo Cobb-Douglas espressa in termini pro-capite; in termini assoluti essa si scrive

$$Y = hJ^{1/2}L^{1/2}, \tag{9.11$'$}$$

dove, usando la notazione di Samuelson, J indica il "capitale surrogato", la "gelatina" (*jelly*) che può assumere diverse forme fisiche a seconda del bene capitale in cui si materializza.

Come già detto tutti i risultati qui ottenuti poggiano su un'ipotesi che risulta cruciale per tutta l'analisi: l'uniformità delle proporzioni fra capitale e lavoro nei due settori (cfr. equazione (9.6)). Se cade questa ipotesi le relazioni $w(\pi)$ non sono più lineari, e si ritorna al caso generale dove è possibile il ritorno delle tecniche e l'inversione dell'intensità capitalista. Tale ipotesi costituisce infatti il punto debole di tutta l'analisi di Samuelson: non vi è nessuna ragione per supporre che debba essere valida; anzi se essa fosse valida, data la presenza di rendimenti di scala costanti, non vi sarebbe alcuna differenza tecnologica fra i due settori e quindi ci troveremmo nuovamente nel mondo a un solo bene della sezione 2 del capitolo 5.

Appendice

Appendice A

Appendice matematica - Richiami di algebra lineare

1 Notazione

In tutto il testo sono state usate le seguenti convenzioni di scrittura. Gli scalari sono indicati con lettere in corsivo, i vettori con lettere minuscole in grassetto e le matrici con lettere maiuscole in grassetto; i vettori sono pensati come vettori *colonna*; i vettori riga sono denotati dal simbolo di trasposizione, ^{T}: $\mathbf{a}$ (vettore colonna), $\mathbf{a}^T$ (vettore riga); inoltre sia $\mathbf{a} = [a_m] \in \Re^M$ e $\mathbf{b} = [b_m] \in \Re^M$; $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ significa $a_m > b_m, m = 1, \ldots, M$, $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ significa $a_m \geq b_m, m = 1, \ldots, M$ e $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \geqq \mathbf{b}$ significa $a_i \geq b_m, m = 1, \ldots, M$. La stessa convenzione vale per le matrici.

$\mathbf{o}$ e $\mathbf{O}$ sono, rispettivamente, un vettore e una matrice di elementi tutti nulli. Un vettore $\mathbf{a}$ è *positivo* se $\mathbf{a} > \mathbf{o}$, *semi-positivo* se $\mathbf{a} \geq \mathbf{o}$, *non-negativo* se $\mathbf{a} \geqq \mathbf{o}$. Una matrice $\mathbf{A}$ è *positiva* se $\mathbf{A} > \mathbf{O}$, *semi-positiva* se $\mathbf{A} \geq \mathbf{O}$, *non-negativa* se $\mathbf{A} \geqq \mathbf{O}$.

2 Potenze di matrici

DEFINIZIONE 1. *Sia data una matrice quadrata,* $\mathbf{A}$*; si definisce* potenza k-esima *di* $\mathbf{A}$*, con* $k \in \mathbb{N}$*, il prodotto di* k *matrici uguali ad* $\mathbf{A}$*,*

$$\mathbf{A}^k := \underbrace{\mathbf{A} \cdot \ \cdots \ \cdot \mathbf{A}}_{k \text{ fattori}}.$$

Per estendere la definizione a $k \in \mathbb{Z}$, cioè all'insieme dei numeri relativi, bisogna supporre che $\mathbf{A}$ sia invertibile; in tal caso, indicando con h un numero naturale positivo si definisce

$$\mathbf{A}^{-h} := (\mathbf{A}^{-1})^h$$

(è evidente, in tal caso, l'analogia con la definizione di potenza dei numeri reali con esponente relativo: dato $a \in \mathbb{R}$, se $a \neq 0$ allora esiste a^{-h}, $h \in \mathbb{N}$ e risulta $a^{-h} = \left(\frac{1}{a}\right)^h$).

In analogia con gli scalari poniamo inoltre, per convenzione,

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I};$$

in tal modo valgono le seguenti proprietà:

$$\mathbf{A}^m \cdot \mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$$
$$\mathbf{A}^m \cdot \mathbf{A}^{-n} = \mathbf{A}^{m-n}.$$

3 Trasformazione per similitudine. Matrici simili.

Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata data di ordine M e siano λ e $\mathbf{x}$, rispettivamente, un suo autovalore e il corrispondente autovettore destro; pertanto

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{A.1}$$

Sia inoltre $\mathbf{P}$ una matrice quadrata data, anch'essa di ordine M, non-singolare; pre-moltiplicando (A.1) per $\mathbf{P}^{-1}$ si ha: $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$, che è equivalente a $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$, cioè

$$(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y},$$

dove $\mathbf{y} := \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$; si è dunque ottenuto che:

- λ è anche autovalore di $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$;
- $\mathbf{y}$ è il corrispondente autovettore.

L'operazione $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ si dice *trasformazione per similitudine* di $\mathbf{A}$; le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ si dicono *matrici simili*.

4 Diagonalizzazione di una matrice quadrata

Vediamo ora una particolare trasformazione per similitudine. Sia data una matrice quadrata $\mathbf{A}$ di ordine M e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \ldots, \lambda_M$ i suoi autovalori e $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \ldots, \mathbf{x}_M$ i corrispondenti autovettori destri. Allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_m &= \lambda_m \mathbf{x}_m \\ &\vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_M &= \lambda_M \mathbf{x}_M \end{aligned} \tag{A.2}$$

Possiamo scrivere le (A.2) in forma più compatta come segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{x}_m & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_m \mathbf{x}_m \cdots & \lambda_M \mathbf{x}_M \end{bmatrix},$$

oppure

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_m & \cdots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_m & \cdots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \lambda_m & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_M \end{bmatrix}.$$

Siano

$$\mathbf{X} := \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_m & \cdots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{\Lambda} := \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \lambda_m & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_M \end{bmatrix}$$

Le uguaglianze (A.2) possono essere scritte nella forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}. \tag{A.3}$$

Se gli autovalori destri di $\mathbf{A}$ sono linearmente indipendenti, e quindi esiste $\mathbf{X}^{-1}$, allora da (A.3) si ottiene

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \boldsymbol{\Lambda}. \tag{A.4}$$

La (A.4) evidenzia una particolare trasformazione per similitudine che permette di ottenere da $\mathbf{A}$ una matrice diagonale; essa viene detta *diagonalizzazione* di $\mathbf{A}$; si osservi che $\mathbf{A}$ e $\boldsymbol{\Lambda}$ hanno gli stessi autovalori, in quanto $\boldsymbol{\Lambda}$, essendo diagonale, ha la seguente equazione caratteristica, $(\lambda_1 - \lambda) \cdot \cdots \cdot (\lambda_m - \lambda) \cdot \cdots \cdot (\lambda_M - \lambda) = 0$, le cui radici sono proprio gli autovalori di $\mathbf{A}$.

5 Sviluppo in serie di potenze di una matrice

DEFINIZIONE 2. *Sia data una matrice quadrata* $\mathbf{A}$*; essa è* convergente *se*

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbf{A}^N = \mathbf{O}$$

Vale il seguente

TEOREMA 1 (Condizione sufficiente di convergenza). *Siano dati uno scalare positivo* t *e una matrice quadrata* $\mathbf{A}$*; la matrice* $t\mathbf{A}$ *è convergente se*

$$t < \frac{1}{|\lambda^*|}, \tag{A.5}$$

dove λ^* *indica l'autovalore di modulo massimo della matrice* $\mathbf{A}$*.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{A}$ diagonalizzabile[1]; allora

$$\mathbf{X}^{-1}(t\mathbf{A})\mathbf{X} = t\boldsymbol{\Lambda}; \tag{A.6}$$

[1] In questa sede diamo la dimostrazione solo per il caso di $\mathbf{A}$ diagonalizzabile; per la trattazione del caso più generale si veda Pasinetti (1975, pp. 348–50).

elevando al quadrato la relazione (A.6) si ottiene $\mathbf{X}^{-1}t\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1}t\mathbf{A}\mathbf{X} = t\mathbf{\Lambda}$ e, semplificando si ottiene $\mathbf{X}^{-1}(t\mathbf{A})^2\mathbf{X} = (t\mathbf{\Lambda})^2$; elevando alla terza la (A.6) si ottiene $\mathbf{X}^{-1}(t\mathbf{A})^3\mathbf{X} = (t\mathbf{\Lambda})^3$; elevando la (A.6) alla potenza $N^{\text{-esima}}$ si ottiene

$$\mathbf{X}^{-1}(t\mathbf{A})^N\mathbf{X} = (t\mathbf{\Lambda})^N. \tag{A.7}$$

Calcolando il limite per $N \to +\infty$ dei due membri di (A.7), visto che $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}^{-1}$ non dipendono da N, si ha che $t\mathbf{A}$ converge se e solo se $t\mathbf{\Lambda}$ converge. È più semplice studiare le condizioni di convergenza di questa seconda matrice, in quanto si tratta di una matrice diagonale; essa si presenta nella forma:

$$t\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} t\lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & t\lambda_m & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & t\lambda_M \end{bmatrix},$$

pertanto

$$(t\mathbf{\Lambda})^N = \begin{bmatrix} (t\lambda_1)^N & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & (t\lambda_m)^N & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & (t\lambda_M)^N \end{bmatrix}.$$

Da ciò si vede che $(t\mathbf{\Lambda})^N$ converge se e solo se $\lim_{N\to+\infty}(t\lambda_m)^N = 0$, per $m = 1, \dots, M$, il che avviene se e solo se $|t\lambda_m| < 1$, per $m = 1, \dots, M$. Indicando con λ^* l'autovalore di modulo massimo di $\mathbf{\Lambda}$ (e quindi di $\mathbf{A}$) la condizione necessaria e sufficiente di convergenza di $\mathbf{\Lambda}$, e quindi di $\mathbf{A}$, si riduce a $|t\lambda^*| < 1$ e, visto che t è supposto positivo, a

$$t < \frac{1}{|\lambda^*|},$$

che coincide, appunto, con la (A.5).

□

Vale inoltre il seguente

TEOREMA 2 (Inversione mediante sviluppo in serie di potenze). *Siano t uno scalare positivo e $\mathbf{A}$ una matrice quadrata dati; se*

$$t < \frac{1}{|\lambda^*|}$$

allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (t\mathbf{A})^n \equiv \mathbf{I} + t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2 + \ldots = (\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1}. \tag{A.8}$$

Dimostrazione. Si consideri la somma

$$\sum_{n=0}^{+N} (t\mathbf{A})^n = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2 + \ldots + (t\mathbf{A})^N;$$

post-moltiplicando ambo i membri per $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})$ e semplificando si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{+N} (t\mathbf{A})^n \cdot (\mathbf{I} - t\mathbf{A}) = [\mathbf{I} + t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2 + \ldots + (t\mathbf{A})^N] \cdot (\mathbf{I} - t\mathbf{A}) = I - (t\mathbf{A})^{N+1};$$

applicando l'operatore $\lim_{N \to +\infty}$ ad ambo i membri di tale relazione si ha che

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{+N} (t\mathbf{A})^n \cdot (\mathbf{I} - t\mathbf{A}) = \mathbf{I} - \lim_{N \to +\infty} (t\mathbf{A})^{N+1};$$

ricordando però che, per ipotesi, $t < 1/|\lambda^*|$, la matrice $t\mathbf{A}$ è convergente, quindi il secondo membro converge alla matrice identità; si ha dunque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (t\mathbf{A})^n (\mathbf{I} - t\mathbf{A}) = \mathbf{I},$$

cioè, che $\sum_{n=0}^{+\infty} (t\mathbf{A})^n$ è l'inversa di $\mathbf{I} - t\mathbf{A}$, cioè che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (t\mathbf{A})^n = (\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1}.$$

$\square$

6 Teoremi sulle matrici a elementi non-negativi

Introduciamo dapprima la seguente

DEFINIZIONE 3. *Una matrice quadrata* $\mathbf{A}$ *si dice* riducibile *(o* decomponibile*) se mediante l'interscambio di alcune righe* e delle corrispondenti colonne *essa può essere ri-espressa nella forma quasi-triangolare*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

dove $\mathbf{A}_{11}$ *e* $\mathbf{A}_{22}$ *sono due matrici quadrate. Se non è possibile riesprimere la matrice* $\mathbf{A}$ *nella forma suddetta allora essa si dice* irriducibile *(o* indecomponibile*).*

Valgono i seguenti teoremi.

TEOREMA 3 (Perron-Frobenius). *Sia* $\mathbf{A}$ *una matrice quadrata semipositiva, irriducibile. Valgono i seguenti risultati:*

1. $\mathbf{A}$ *possiede un autovalore,* λ^**, con le seguenti caratteristiche:*
   (a) λ^* *è reale e positivo;*
   (b) $\lambda^* \geq |\eta|$*, dove con* η *indica un qualunque altro autovalore di* $\mathbf{A}$*;*
   (c) λ^* *è radice semplice dell'equazione caratteristica.*
2. *A* λ^* *sono associati un autovettore destro,* $\mathbf{x}^*$*, e un autovettore sinistro,* $\mathbf{y}^{*T}$*, entrambi positivi (*$\mathbf{x}^* > \mathbf{o}$ *e* $\mathbf{y}^{*T} > \mathbf{o}^T$*).*
3. *Gli autovettori destri e sinistri associati a qualunque altro autovalore* η *di* $\mathbf{A}$ *possiedono almeno una componente negativa.*
4. λ^* *è funzione continua e crescente degli elementi di* $\mathbf{A}$.
5. *Siano* t *ed* s *due scalari positivi tali che* $s = 1/t$*; se*

$$s > \lambda^* \quad \text{o, equivalentemente,} \quad t < 1/\lambda^*$$

   allora:

(a) $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} > \mathbf{O}$ e $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1} > \mathbf{O}$;

(b) *gli elementi di* $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ *sono funzioni continue e decrescenti di* s *e gli elementi di* $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1}$ *sono funzioni continue e crescenti di* t.

6. *Siano* $\boldsymbol{\alpha}_i^T$ *le righe di* $\mathbf{A}$ *e sia* $\mathbf{u}$ *il vettore somma; si ha:*

$$\min_i \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{u} \leq \lambda^* \leq \max_i \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{u},$$

ossia l'autovalore λ^* *è compreso tra la minima e la massima delle somme per riga di* $\mathbf{A}$. *Analogo risultato vale per la minima e la massima delle somme per colonna.*

TEOREMA 4 (Perron-Frobenius). *Sia* $\mathbf{A}$ *una matrice quadrata semi-positiva, riducibile. Valgono i seguenti risultati:*

1. $\mathbf{A}$ *possiede un autovalore,* λ^*, *con le seguenti caratteristiche:*

   (a) λ^* *è reale e positivo;*

   (b) $\lambda^* \geq |\eta|$, *dove con* η *indica un qualunque altro autovalore di* $\mathbf{A}$;

   (c) (non c'è un corrispondente del risultato 1c).

2. *A* λ^* *sono associati un autovettore destro,* $\mathbf{x}^*$, *e un autovettore sinistro,* $\mathbf{y}^{*T}$, *entrambi semi-positivi (*$\mathbf{x}^* \geq \mathbf{o}$ *e* $\mathbf{y}^{*T} \geq \mathbf{o}^T$*).*

3. *(non c'è un corrispondente del risultato 3)*

4. λ^* *è funzione continua e non-decrescente degli elementi di* $\mathbf{A}$.

5. *Siano* t *ed* s *due scalari positivi tali che* $s = 1/t$*; se*

$$s > \lambda^* \quad \text{o, equivalentemente,} \quad t < 1/\lambda^*$$

   allora:

   (a) $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{O}$ e $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{O}$;

(b) *gli elementi di* $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ *sono funzioni continue e non-crescenti di* s *e gli elementi di* $(\mathbf{I} - t\mathbf{A})^{-1}$ *sono funzioni continue e non-decrescenti di* t.

6. *Siano* $\boldsymbol{\alpha}_i^T$ *le righe di* $\mathbf{A}$ *e sia* $\mathbf{u}$ *il vettore somma; si ha:*

$$\min_i \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{u} \leq \lambda^* \leq \max_i \boldsymbol{\alpha}_i^T \mathbf{u},$$

ossia l'autovalore λ^* *è compreso tra la minima e la massima delle somme per riga di* $\mathbf{A}$. *Analogo risultato vale per la minima e la massima delle somme per colonna.*

Riferimenti bibliografici

A.A.V.V. (1966): "Paradoxes in Capital Theory: a Symposium," *The Quarterly Journal of Economics*, LXXX(4), 503–583, con contributi di L. L. Pasinetti, P. A. Samuelson-D. Levhari, M. Morishima, M. Bruno-E. Burmeister-E. Sheshinsky, P. Garegnani e P. A. Samuelson.

Abraham-Frois, G., e E. Berrebi (1978): "Pluralité de marchandises étalons: existence ed construction," *Revue d'économie politique*, 88(5), 688–712.

Arrow, K. J., e G. Debreu (1954): "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica*, 22(3), 265–290.

Baldone, S. (1980): "Misure invariabili del valore e merce tipo," *Ricerche economiche*, XXXIV(3-4), 272–283.

Barozzi, G. C., e C. Corradi (1985): *Matematica per le scienze economiche e statistiche*. Il Mulino, Bologna.

Bellino, E. (1993): "Continuous Switching of Techniques in Linear Production Models," *The Manchester School of Economic and Social Studies*, 61(2), 185–201.

——— (2004): "On Sraffa's Standard commodity," *Cambridge Journal of Economics*, 28(1), 121–132.

Bidard, C. (1978): "Sur le système-étalon de Sraffa," *Revue d'économie politique*, 88(5), 739–745.

Blanchard, O. F. (1998): *Macroeconomia*. Il Mulino, Bologna.

CLARK, J. B. (1891): "Distribution as Determined by a Law of Rent," *The Quarterly Journal of Economics*, 5(3), 289–318.

——— (1899): *The Distribution of Wealth: A Theory of Wages, Interest and Profits*. The Macmillan Company, New York and London.

GAREGNANI, P. (1960): *Il capitale nelle teorie della distribuzione*. Giuffrè, Milano.

GAREGNANI, P. (1968): "Mathematical Note to Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution," available at the Marshall Library of Economics, University of Cambridge, published in Italian as an appendix to the Italian edition of "Beni capitali eterogenei, la funzione della produzione e la teoria della distribuzione" in P. Sylos Labini (ed.) *Prezzi relativi e distribuzione del reddito*, Torino, Boringhieri, 1973, pp. 332–345; and in G. Lunghini (ed.), *Produzione, capitale e distribuzione*, Milano, ISEDI, 1975, pp. 117–125.

——— (1970): "Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution," *The Review of Economic Studies*, 37(3), 407–36.

GAREGNANI, P. (1976): "On a Change in the Notion of Equilibrium in Recent Work on Value and Distribution. A Comment on Samuelson," in *Essays in Modern Capital Theory*, ed. by M. Brown, K. Sato, and P. Zarembka, pp. 25–45. North Holland, Amsterdam.

GAREGNANI, P. (1983): "The Classical Theory of Wages and the Role of Demand Schedules in the Determination of Relative Prices," *The American Economic Review* – Papers and Proceedings of the Ninety-Fifth Annual Meeting of the American Economic Association, 73(2), 309–313.

——— (1984): "Value and Distribution in the Classical Economics and in Marx," *Oxford Economic Papers*, 36(2), 291–325.

GAREGNANI, P. (2003): "Savings, Investment and Capital in a System of General Intertemporal Equilibrium," in *General Equilibrium:*

Problems and Prospects, ed. by F. Hahn, and F. Petri, pp. xxx–xxx. Routledge, London.

Heijdra, B. J., e F. van der Ploeg (2002): *The Foundations of Modern Macroeconomics*. Oxford University Press, Oxford.

Kaldor, N. (1955-56): "Alternative Theories of Distribution," *The Review of Economic Studies*, XXIII(2)(61), 83–100.

Kurz, H. D., e N. Salvadori (1994): *Theory of Production – A Long-Period Approach*. Cambridge University Press, Cambridge.

Levhari, D. (1965): "A Nonsubstitution Theorem and Switching of Techniques," *The Quarterly Journal of Economics*, 79(1), 98–105.

Levhari, D., e P. A. Samuelson (1966): "The Nonswitching Theorem is False," *The Quarterly Journal of Economics*, 80(4), 518–9.

Marx, K. (1867-86-94): *Das Kapital*, vol. I, II, III. Meissner, Hamburg.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston, e J. R. Green (1995): *Microeconomic Theory*. Oxforf University Press, Oxford and New York.

Miyao, T. (1977): "A Generalization of Sraffa's Standard Commodity and Its Complete Characterization," *International Economic Review*, 18(1), 151–162.

Morishima, M. (1973): *Marx's Economics. A Dual Theory of Value and Growth*. Cambridge University Press, Cambridge.

Panico, C. (1988): *Interest and Profit in the Theories of Value and Distribution*. Macmillan, London.

Pareto, V. (1897): *Cours d'économie politique*.

Pasinetti , L. L. (1960): "A Mathematical Formulation of the Ricardian System," *The Reviev of Economic Studies*, XXVII(2)(73), 78–98, trad. it. *Una formulazione matematica del sistema ricardiano,* in Luigi L. Pasinetti, *Sviluppo economico e distribuzione del reddito*, 1977, Il Mulino, Bologna,.

——— (1962): "Rate of Profit and Income Distribution in Relation to the Rate of Economic Growth," *The Review of Economic Studies*, 29(4), 267–279.

Pasinetti, L. L. (1965a): "Changes in the Rate of Profit and Degree of Mechanization: A Controversial Issue in Capital Theory," paper presented at the First World Congress of the Econometric Society, Rome, September 1965, mimeo.

——— (1965b): "A New Theoretical Approach to the Problems of Economic Growth," *Pontificia Academia Scientiarum Scripta Varia*, 28.

Pasinetti, L. L. (1969): "Switches of Techniques and the 'Rate of Return' in Capital Theory," *The Economic Journal*, 79(315), 508–31.

Pasinetti , L. L. (1975): *Lezioni di teoria della produzione*. Il Mulino, Bologna, 1a ediz.

——— (1984): *Dinamica strutturale e sviluppo economico. Un'indagine teorica sui mutamenti nella ricchezza delle nazioni,*. UTET, Torino.

——— (1988): "Sraffa on income ditribution," *Cambridge Journal of Economics*, 12(1), 135–138.

——— (1993): *Dinamica ecoonmica strutturale: Un'indagine teorica sulle conseguenze dell'apprendimento umano*. Il Mulino, Bologna.

Pivetti, M. (1985): "On the Monetary Explanation of Distribution," *Political Economy. Studies in the Surplus Approach.*, 1, 73–103.

Quesnay, F. F. (1758): *Tableau conomique*. XXX, Paris???

Ramsey, F. P. (1928): "A Mathematical Theory of Saving," *The Economic Journal*, XXXVIII(152), 543–59.

Ricardo, D. (1815): *An Essay on the Influence of a low Price of Corn on the Profits of Stock*. John Murray, London.

——— (1817): *On the Principles of Political Economy and Taxation*. John Murray, London, edition used: *On the Principles of Political Economy and Taxation*, Vol. 1 of Sraffa Piero (ed.) *The Works and the Correspondences of David Ricardo*, Cambridge University Press, Cambridge, 1951.

Robinson, J. V. (1953–54): "The Production Function and the Theory of Capital," *The Review of Economic Studies*, 21(2), 81–106.

Samuelson, P. A. (1962): "Parable and Realism in Capital Theory: the Surrogate Production Function," *The Review of Economic Studies*, 39(3), 193–206.

Smith, A. (1776): *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. W. Strahan, T. Cadell, London, 2 vol.; edition used edited by R. H. Campbell, A. S. Skinner, W. B. Todd, Clarendon Press, Oxford, 1976.

Solow, R. M. (1956): "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65–94.

Spaventa, L. (1968): "Realism without Parables in Capital Theory," in *Recherches rcentes sur la fonction de production*. Centre d'Etudes et des Recherches Universitaires de Namur.

Sraffa, P. (1951): "Introduction," in *The Works and Correspondence of David Ricardo*, vol. 1, DA INSERIRE, a cura di P. Sraffa, in collaborazione con M. Dobb.

——— (1960): *Produzione di merci a mezzo di merci - Premesse a una critica della teoria economica*. Einaudi, Torino.

von Bhm-Bawerk, E. (1891): *The Positive Theory of Capital*. The Macmillan Company, New York and London, transl. of the German Edition.

von Bortkiewicz, L. (1907): "Zur Berichtigung der Grundlegenden theoretischen Konstruktion von Marx im dritten Band des "Kapital"," *Jahrb. für Nationalökonomie und Statistik*, 3(XXXIV), 319–335, trad. it. *Per una rettifica dei fondamenti della costruzione teorica* *di Marx nel terzo volume del Capitale* in Luca Meldolesi (a cura di), *La teoria economica di Marx e altri saggi*, 1971, Einaudi, Torino.

von Neumann, J. (1938): "Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verllgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes," in *Ergebuisse eines Mathematischen Seminars*, ed. by K. Menger, no. 8. Vien, English transl. "A Model of General Economic Equilibrium", in *The Review of Economic Studies*, XIII-XIV, 1945-46, pp. 1–9.

Walras, L. (1874): *Elements d'économie politique pure.*

Wicksell, K. (1893): *ber Wert, Kapital und Rente.* G. Fisher, Jena, English transl. *Value, Capital and Rent*, George Allen & Unwin Ltd, London, 1954.

——— (1901): *Vorlesungen uber Nationalokonomie*, vol. I and II. English translation: *Lectures on Political Economy*, I, Routledge & Kegan Paul, London, 1934.

Wicksteed, P. H. (1894): *An Essay on the Co-ordination of the Laws of Distribution.* The Macmillan Company, New York and London.

(I vari dati relativi alle pubblicazioni elencate si riferiscono alle prime edizioni; nel caso in cui i riferimenti richiamati nel testo siano relativi a edizioni successive sono stati riportati i dati delle edizioni successive.)